Комбинированный метод: идея, эффективность, роль точно решаемых задач

1. Идея комбинированного метода

В задачах распространения волн/поля часто используют параболическое уравнение (ПУ), которое хорошо описывает преимущественно направленное вперёд поле и даёт быстрые вычисления. Однако в ближней зоне (или при сильной кривизне/геометрических особенностях) параболическое приближение может давать заметную ошибку.

Комбинированный метод строится так:

- В ближней зоне решается более точная модель (в пределе — исходное уравнение, например Гельмгольца).
- На некоторой границе (условно $r = R$ или $\xi = \xi_*$) фиксируется поле и/или его производные.
- В дальней зоне решение продолжается по параболическому уравнению, используя данные на границе как начальные/граничные.

Таким образом, точная часть берётся там, где она реально нужна, а быстрая параболическая - там, где она даёт экономию.

2. Эффективность

Под эффективностью далее понимаются два параметра:

(A) Скорость вычислений. Оценивается по числу операций и/или по времени выполнения. Для схемы Кранка–Николсона (КН) на сетке из N узлов по поперечной координате и N_t шагов по "дальности" (параболическому времени) стоимость обычно имеет вид

$$\text{cost} \sim O(N\,N_t),$$

поскольку на каждом шаге решается линейная система специального вида (для 1D поперечной координаты — трёхдиагональная, для периодического случая — циклическая трёхдиагональная).

(B) Ошибка. Если известен точный эталон u_{exact}, то ошибка оценивается, например, в нормах

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\|u_{\text{num}}(t) - u_{\text{exact}}(t)\|_2}{\|u_{\text{exact}}(t)\|_2}, \qquad \varepsilon_\infty(t) = \|u_{\text{num}}(t) - u_{\text{exact}}(t)\|_\infty.$$

Если точного решения нет, используют сеточную сходимость (сравнение решений на разных шагах), либо сравнение с более точным численным решением полной модели.

3. Зачем нужны точно решаемые задачи

Точно решаемые тесты необходимы для *объективной* оценки ошибки и сравнения методов. Без эталона невозможно честно измерить вклад:

- дискретизации (схема, шаг по координатам),
- самого параболического приближения (модельная ошибка),
- комбинирования (стыковка ближней и дальней зон).

Поэтому на первых этапах выбирают геометрии, где есть аналитический эталон: окружность (постоянная кривизна) — базовый тест.

4. Тест на окружности: каноническая задача для проверки

На окружности после стандартных преобразований (переход к "параболическому времени" и поперечной координате) получается уравнение вида

$$2i\,\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}=0,\qquad \psi\in[0,2\pi),\qquad W(t,\psi+2\pi)=W(t,\psi),\tag{1}$$

где ψ — угловая переменная (периодическая), t — "параболическое время".

Эта задача точно решается разложением по гармоникам: если

$$W(0,\psi)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{W}_m e^{im\psi},$$

то

$$W(t,\psi)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{W}_m\exp\left(-\frac{im^2}{2}t\right)e^{im\psi}.\tag{2}$$

Формула (2) используется как точный эталон для измерения ошибки численного метода.

5. Схема Кранка–Николсона для окружности

Перепишем (1) как

$$W_t=\frac{i}{2}W_{\psi\psi}.$$

На равномерной сетке $\psi_j=j\Delta\psi$, $j=0,\dots,N-1$, $\Delta\psi=2\pi/N$, центральная аппроксимация второй производной:

$$(D_2W)_j=\frac{W_{j+1}-2W_j+W_{j-1}}{\Delta\psi^2},\quad \text{индексы по модулю } N.$$

Схема КН:

$$\frac{W^{n+1}-W^n}{\Delta t}=\frac{i}{4}\Big(D_2W^{n+1}+D_2W^n\Big).\tag{3}$$

После переноса членов получается линейная система на каждом шаге:

$$\Big(I - \frac{i\Delta t}{4} D_2\Big) W^{n+1} = \Big(I + \frac{i\Delta t}{4} D_2\Big) W^n.$$

Из-за периодических условий матрица является *циклической трёхдиагональной*. Её решение выполняется за $O(N)$ операций на шаг, то есть суммарно $O(N N_t)$.