

Широкоугольные односторонние волновые уравнения: Математические основы и численные стратегии

Интеграция проекта: от параболической аппроксимации к рациональным прибо

1 Аннотация

Данный отчет посвящен переходу от классических параболических уравнений к широкоугольным односторонним волновым уравнениям (One-Way Wave Equations, OWWE). В основе исследования лежат работы Л. Халперн и Л. Трефетена, предлагающие использование рациональных аппроксимаций типа Паде для повышения угловой точности и обеспечения математической корректности моделей. [1, 2, 3]

2 Теоретический базис факторизации волнового оператора

Фундаментальной проблемой при выводе одностороннего волнового уравнения является обработка квадратного корня из оператора Лапласа. Для однородной среды классическое волновое уравнение в двумерном пространстве записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Для монохроматической волны с частотой ω и волновым числом $k = \omega/c$ уравнение Гельмгольца принимает вид $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2)u = 0$. Формальная факторизация этого оператора на две компоненты приводит к

выражению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) u = 0 \quad (2)$$

Идеальное одностороннее уравнение для волн, распространяющихся вправо, имеет вид $\partial_x u = ik \sqrt{1 + s^2} u$, где оператор $s^2 = \frac{1}{k^2} \partial_y^2$. [4, 5, 3]

2.1 Параболическая аппроксимация (Level 1)

Традиционный подход заключается в разложении квадратного корня в ряд Тейлора: $\sqrt{1 + s^2} \approx 1 + \frac{1}{2} s^2$. Это соответствует стандартному параболическому уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik \left(1 + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (3)$$

Этот метод эквивалентен отбрасыванию второй производной $u_{\xi\xi}$ в сопутствующей системе координат, что ограничивает точность узким конусом углов (около 15 градусов). [6, 7, 3]

3 Рациональные аппроксимации и таблицы Паде

Для расширения углового диапазона функция $f(s) = \sqrt{1 - s^2}$ заменяется рациональной функцией $r(s) = P_m(s)/Q_n(s)$. [1, 4, 3]

Таблица 1: Типы аппроксимантов Паде и их характеристики

Тип (m, n)	Функция $r(s)$	Углы	Название
(0, 0)	1	$\approx 5^\circ$	Уравнение переноса [1]
(2, 0)	$1 - \frac{1}{2} s^2$	$\approx 15^\circ$	Стандартное РЕ [1, 3]
(2, 2)	$\frac{1-0.75s^2}{1-0.25s^2}$	$\approx 45^\circ$	Широкоугольное РЕ [1, 3]
(4, 4)	Высокий порядок	$> 60^\circ$	РЕ высокого порядка [8, 9]

4 Математическая корректность по Халперн-Трефетену

Л. Халперн и Л. Трефетен установили критерии устойчивости (well-posedness) для OWWE. Задача является корректно поставленной, если:

1. Нули и полюса $r(s)/s$ вещественны, просты и перемежаются на вещественной оси. [10, 11]
2. Для поглощающих границ $r(s) > 0$ при $s \in [-1, 1]$. [10, 11]

Этим условиям удовлетворяют аппроксиманты вдоль «лестницы» таблицы Паде ($m = n$ или $m = n + 2$). [4, 10]

5 Реализация в неоднородных средах

Для сред с переменной скоростью $c(x, y)$ необходимо использовать уравнения, сохраняющие амплитуду (True-Amplitude). Новое параболическое уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \sqrt{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{c}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{c}} \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\sqrt{c}} \right) \right) = 0 \quad (4)$$

Такая структура обеспечивает корректные коэффициенты отражения на границах разделов. [12, 6]

6 Численный алгоритм: Split-Step Padé

Метод Split-Step Padé (SSP) позволяет эффективно решать широкоугольные задачи. Оператор эволюции аппроксимируется рациональной функцией:

$$u(r + \Delta r) \approx \exp \left(ik_0 \Delta r (\sqrt{1 + q} - 1) \right) u(r) \quad (5)$$

Использование техники поворота разреза (Rotated Operator Padé) подавляет затухающие моды, предотвращая неустойчивость. [13, 14, 9]

7 Заключение и рекомендации

Для улучшения текущего проекта предлагается:

- Заменить отбрасывание $u_{\xi\xi}$ на рациональную аппроксимацию Паде типа (2,2) или выше. [4, 3]
- Применять Чебышёвские коэффициенты (L^∞) для сверхширокоугольных задач. [15, 1, 2]
- Использовать формулировку Бамбергера для неоднородных сред для сохранения точности амплитуд. [6, 16]