Смысл координат (ξ, s) и новой переменной σ

1. Координаты (ξ, s) около контура

Пусть задан гладкий плоский контур, параметризованный длиной дуги s, и пусть $\vec{a}(s)$ - радиус-вектор точки контура, $\vec{\tau}(s)$ - единичный касательный вектор, $\vec{n}(s)$ - единичный вектор нормали к контуру, $\rho(s)$ - радиус кривизны.

В окрестности контура вводится отображение

$$\vec{r}(\xi, s) = \vec{a}(s) + \xi\, \vec{n}(s), \tag{1}$$

где ξ - расстояние по нормали от контура (знак определяется выбором $\vec{n}$), а s - длина дуги вдоль контура.

2. Коэффициенты Ламе и их геометрический смысл

Коэффициенты Ламе определяются как

$$h_\xi = \left|\frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial \xi}\right|, \qquad h_s = \left|\frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial s}\right|.$$

Из (1) получаем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \vec{n}(s), \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{a}'(s) + \xi\, \vec{n}'(s).$$

С учётом формул Френе–Серре

$$\vec{a}'(s) = \vec{\tau}(s), \qquad \vec{n}'(s) = \frac{\vec{\tau}(s)}{\rho(s)},$$

получаем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{\tau}(s) + \xi\, \frac{\vec{\tau}(s)}{\rho(s)} = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) \vec{\tau}(s).$$

Следовательно,

$$h_\xi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\right| = 1, \qquad h_s = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = h(\xi, s). \tag{1.4.10}$$

Смысл h_s. Если вдоль исходного контура сделать малый шаг ds, то реальная длина дуги на линии, параллельной контуру и отстоящей на расстоянии ξ, равна

$$d\ell_\parallel = h_s(\xi, s)\, ds.$$

То есть h_s является масштабным множителем (растяжением) длины вдоль параллельного контура.

3. Введение новой переменной σ и её смысл

Введём новую переменную:

$$\sigma = \int_0^s h_s(\xi, s')\,ds' = s + \xi\,\gamma(s); \qquad \gamma(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho(s')}\,ds'. \tag{1.4.12}$$

3.1. Геометрический смысл σ

Зафиксируем ξ и рассмотрим линию, параллельную контуру (эквидистанту)

$$\vec{r}_\xi(s) = \vec{r}(\xi, s) = \vec{a}(s) + \xi\,\vec{n}(s).$$

Её элемент длины дуги равен

$$d\sigma \equiv d\ell_\parallel = \left|\frac{\partial\vec{r}(\xi, s)}{\partial s}\right|\,ds = h_s(\xi, s)\,ds.$$

Интегрируя от 0 до s, получаем

$$\sigma(\xi, s) = \int_0^s h_s(\xi, s')\,ds'.$$

Следовательно, σ **является длиной дуги вдоль контура, параллельного телу и отстоящего на расстоянии** ξ (то есть “эффективной длиной” на удалённом контуре).

3.2. Смысл функции $\gamma(s)$

Так как $h_s(\xi, s) = 1 + \dfrac{\xi}{\rho(s)}$, то

$$\sigma = \int_0^s \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s')}\right) ds' = s + \xi \int_0^s \frac{1}{\rho(s')} ds' = s + \xi\,\gamma(s).$$

В плоском случае кривизна равна $\kappa(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}$. Пусть угол наклона касательной к оси x равен $\theta(s)$, тогда

$$\vec{\tau}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)).$$

Дифференцируя по s, получаем

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \theta'(s)\,(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)), \qquad \left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\| = |\theta'(s)|.$$

Но по определению кривизны

$$\left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\| = \kappa(s) = \frac{1}{\rho(s)}.$$

При согласованном выборе ориентации знаков (как в формулах Френе–Серре диплома) получаем

$$\theta'(s) = \frac{1}{\rho(s)}.$$

Интегрируя от 0 до s, имеем

$$\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \frac{1}{\rho(s')} ds' = \gamma(s).$$

Следовательно, $\gamma(s)$ **- угол, на который поворачивается касательная к контуру при обходе вдоль контура от** 0 **до** s**.**

4. Зачем вводить σ в уравнениях

Из определения σ следует

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = h_s(\xi, s).$$

Отсюда при фиксированном ξ:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \sigma} = h_s(\xi, s) \, \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Поэтому оператор вдоль контура, встречающийся в параболическом уравнении Малюжинца, упрощается:

$$\frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h_s} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) = \frac{1}{h_s} \, h_s \, \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}.$$

То есть переход к σ устраняет геометрический множитель h_s в “диффузионном” члене по s.

При этом важно, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \gamma(s),$$

поэтому для производных по ξ при переходе к координатам (ξ, σ) возникает связь

$$u_\xi\big|_s = u_\xi\big|_\sigma + \gamma(s) \, u_\sigma,$$

что учитывается при полном переписывании уравнения в новых координатах.