Подробное получение (1.4.18) и конечного результата (1.4.19)

0. Исходная задача для V (формула (1.4.15))

Рассматривается задача для функции $V(\xi,\sigma)$:

$$\begin{cases} 2ik\,\dfrac{\partial V}{\partial \xi} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = 0, \qquad 0 \le \sigma \le L + \xi\,\gamma(L),\ \xi \ge 0, \\ V(0,\sigma) = u_0(\sigma)\exp\left(ik\displaystyle\int_0^\sigma \gamma(\sigma')\,d\sigma'\right). \end{cases} \tag{1.4.15}$$

Цель: преобразовать область $\{(\xi,\sigma)\}$ к прямоугольнику и свести уравнение к каноническому виду.

1. Преобразование области: замены (1.4.16)–(1.4.17)

Для дальнейшего упрощения задачи (тут требуется преобразовать область координат, в которой ищем решение), сделаем следующие подстановки:

$$\tilde\xi = \xi + \frac{L}{\gamma(L)}; \qquad V(\xi,\sigma) = \tilde V(\tilde\xi,\sigma); \qquad \tilde V(\tilde\xi,\sigma) = \frac{e^{ik\frac{\sigma^2}{2\tilde\xi}}}{\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\,\tilde\xi}}\,\tilde W\left(\frac{1}{k\tilde\xi},\frac{\sigma}{\tilde\xi}\right). \tag{1.4.16}$$

$$\tilde t = \frac{1}{k\tilde\xi}; \qquad \psi = \frac{\sigma}{\tilde\xi}; \qquad t = t_0 - \tilde t; \qquad \tilde W(\tilde t,\psi) = W(t,\psi); \qquad t_0 = \frac{\gamma(L)}{kL}. \tag{1.4.17}$$

Далее последовательно распишем, **почему именно такие замены приводят к (1.4.18)**.

2. Шаг 1: сдвиг $\xi \mapsto \tilde\xi$ и изменение области

Пусть

$$\tilde\xi = \xi + \frac{L}{\gamma(L)}.$$

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial\xi} = \dfrac{\partial}{\partial\tilde\xi}$, поэтому уравнение сохраняет вид:

$$2ik\,V_\xi + V_{\sigma\sigma} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2ik\,\tilde V_{\tilde\xi} + \tilde V_{\sigma\sigma} = 0.$$

Преобразуем верхнюю границу по σ:

$$\sigma \le L + \xi\,\gamma(L) = L + \left(\tilde\xi - \frac{L}{\gamma(L)}\right)\gamma(L) = \gamma(L)\,\tilde\xi.$$

Значит новая область:

$$0 \le \sigma \le \gamma(L)\tilde\xi, \qquad \tilde\xi \ge \frac{L}{\gamma(L)}.$$

3. Шаг 2: нормировка σ и введение $\psi = \sigma/\tilde{\xi}$

Введём
$$\psi = \frac{\sigma}{\tilde{\xi}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \tilde{\xi}\psi.$$
Тогда границы по ψ становятся постоянными:
$$0 \le \sigma \le \gamma(L)\tilde{\xi} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \psi \le \gamma(L).$$

Определим функцию
$$\hat{V}(\tilde{\xi}, \psi) = \tilde{V}(\tilde{\xi}, \sigma), \qquad \sigma = \tilde{\xi}\psi.$$
Далее требуется переписать производные $\tilde{V}_{\tilde{\xi}}|_\sigma$ и $\tilde{V}_{\sigma\sigma}$ через $\hat{V}$.

3.1. Производные по σ

Так как $\psi = \sigma/\tilde{\xi}$, при фиксированном $\tilde{\xi}$:
$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{1}{\tilde{\xi}}.$$
Следовательно,
$$\tilde{V}_\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}\hat{V}(\tilde{\xi}, \psi) = \hat{V}_\psi \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{1}{\tilde{\xi}}\hat{V}_\psi,$$
и
$$\tilde{V}_{\sigma\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\tilde{\xi}}\hat{V}_\psi\right) = \frac{1}{\tilde{\xi}}\left(\hat{V}_{\psi\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right) = \frac{1}{\tilde{\xi}^2}\hat{V}_{\psi\psi}.$$

3.2. Производная по $\tilde{\xi}$ при фиксированном σ

В исходном уравнении стоит $\tilde{V}_{\tilde{\xi}}$ при фиксированном σ. Поскольку $\psi = \sigma/\tilde{\xi}$, при фиксированном σ:
$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\xi}}\right|_\sigma = -\frac{\sigma}{\tilde{\xi}^2} = -\frac{\psi}{\tilde{\xi}}.$$
Следовательно,
$$\left.\tilde{V}_{\tilde{\xi}}\right|_\sigma = \frac{\partial}{\partial\tilde{\xi}}\hat{V}(\tilde{\xi}, \psi) = \left.\hat{V}_{\tilde{\xi}}\right|_\psi + \hat{V}_\psi \left.\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\xi}}\right|_\sigma = \hat{V}_{\tilde{\xi}} - \frac{\psi}{\tilde{\xi}}\hat{V}_\psi.$$

3.3. Подстановка в уравнение

Уравнение $2ik\,\tilde{V}_{\tilde{\xi}} + \tilde{V}_{\sigma\sigma} = 0$ даёт:
$$2ik\left(\hat{V}_{\tilde{\xi}} - \frac{\psi}{\tilde{\xi}}\hat{V}_\psi\right) + \frac{1}{\tilde{\xi}^2}\hat{V}_{\psi\psi} = 0.$$

Умножим на $\tilde{\xi}^2$:
$$2ik\,\tilde{\xi}^2\,\hat{V}_{\tilde{\xi}} - 2ik\,\psi\,\tilde{\xi}\,\hat{V}_\psi + \hat{V}_{\psi\psi} = 0. \tag{1}$$

Это уравнение содержит “конвективный” член $-2ik\,\psi\tilde{\xi}\,\hat{V}_\psi$, который устраняется фазовой подстановкой.

4. Шаг 3: фазовая и амплитудная подстановка (компонента (1.4.16))

Рассмотрим подстановку

$$\hat{V}(\tilde{\xi},\psi)=\frac{e^{ik\frac{\tilde{\xi}\psi^2}{2}}}{\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\,\tilde{\xi}}}\,\hat{W}(\tilde{\xi},\psi).$$

Замечание: так как $\sigma=\tilde{\xi}\psi$, то

$$\frac{\sigma^2}{2\tilde{\xi}}=\frac{\tilde{\xi}^2\psi^2}{2\tilde{\xi}}=\frac{\tilde{\xi}\psi^2}{2},$$

поэтому эта запись эквивалентна фактору $e^{ik\sigma^2/(2\tilde{\xi})}$ в (1.4.16).

Константа $\sqrt{\gamma(L)/L}$ не влияет на дифференцирование, а множитель $\tilde{\xi}^{-1/2}$ выбран так, чтобы после подстановки получилась простая форма уравнения.

Обозначим

$$F(\tilde{\xi},\psi)=\tilde{\xi}^{-\frac{1}{2}}\,e^{ik\frac{\tilde{\xi}\psi^2}{2}}\quad\Rightarrow\quad\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{\gamma(L)/L}}\,F\,\hat{W}.$$

Далее множитель $1/\sqrt{\gamma(L)/L}$ опускается, так как он постоянный.

4.1. Производные по ψ

$$\hat{V}_\psi=F\left(\hat{W}_\psi+ik\tilde{\xi}\psi\,\hat{W}\right).$$

$$\hat{V}_{\psi\psi}=F\left(\hat{W}_{\psi\psi}+2ik\tilde{\xi}\psi\,\hat{W}_\psi+ik\tilde{\xi}\hat{W}-k^2\tilde{\xi}^2\psi^2\hat{W}\right).$$

4.2. Производная по $\tilde{\xi}$ при фиксированном ψ

Сначала

$$\frac{\partial F}{\partial\tilde{\xi}}=F\left(-\frac{1}{2\tilde{\xi}}+ik\frac{\psi^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\hat{V}_{\tilde{\xi}}=F\left(\hat{W}_{\tilde{\xi}}-\frac{1}{2\tilde{\xi}}\hat{W}+ik\frac{\psi^2}{2}\hat{W}\right).$$

4.3. Подстановка в (1) и сокращения

Подставим в (1):

$$2ik\,\tilde{\xi}^2\,\hat{V}_{\tilde{\xi}}-2ik\,\psi\,\tilde{\xi}\,\hat{V}_\psi+\hat{V}_{\psi\psi}=0.$$

После подстановки общего множителя F у всех слагаемых и деления на F получаем:

$$0 = 2ik\,\tilde{\xi}^2\left(\hat{W}_{\tilde{\xi}} - \frac{1}{2\tilde{\xi}}\hat{W} + ik\frac{\psi^2}{2}\hat{W}\right) - 2ik\,\psi\,\tilde{\xi}\left(\hat{W}_\psi + ik\tilde{\xi}\psi\,\hat{W}\right)$$
$$+\left(\hat{W}_{\psi\psi} + 2ik\tilde{\xi}\psi\,\hat{W}_\psi + ik\tilde{\xi}\hat{W} - k^2\tilde{\xi}^2\psi^2\hat{W}\right).$$

Теперь выполняются точные сокращения:

- члены с $\hat{W}_\psi$: $-2ik\psi\tilde{\xi}\hat{W}_\psi$ и $+2ik\tilde{\xi}\psi\hat{W}_\psi$ сокращаются;
- члены с $\hat{W}$ порядка $\tilde{\xi}$: $-ik\tilde{\xi}\hat{W}$ и $+ik\tilde{\xi}\hat{W}$ сокращаются;
- члены с $\hat{W}$ порядка $k^2\tilde{\xi}^2\psi^2$: $+k^2\tilde{\xi}^2\psi^2\hat{W}$ и $-k^2\tilde{\xi}^2\psi^2\hat{W}$ сокращаются.

Остаётся:

$$2ik\,\tilde{\xi}^2\,\hat{W}_{\tilde{\xi}} + \hat{W}_{\psi\psi} = 0.$$

Разделим на $\tilde{\xi}^2$:

$$2ik\,\hat{W}_{\tilde{\xi}} + \frac{1}{\tilde{\xi}^2}\hat{W}_{\psi\psi} = 0. \tag{2}$$

5. Шаг 4: замена $\tilde{t} = 1/(k\tilde{\xi})$ и переход к t

Введём

$$\tilde{t} = \frac{1}{k\tilde{\xi}}.$$

Тогда

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tilde{\xi}} = -\frac{1}{k\tilde{\xi}^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{W}_{\tilde{\xi}} = \hat{W}_{\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{d\tilde{\xi}} = -\frac{1}{k\tilde{\xi}^2}\hat{W}_{\tilde{t}}.$$

Подставим в (2):

$$2ik\left(-\frac{1}{k\tilde{\xi}^2}\hat{W}_{\tilde{t}}\right) + \frac{1}{\tilde{\xi}^2}\hat{W}_{\psi\psi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2i\,\hat{W}_{\tilde{t}} + \hat{W}_{\psi\psi} = 0.$$

То есть

$$2i\,\hat{W}_{\tilde{t}} - \hat{W}_{\psi\psi} = 0. \tag{3}$$

Далее вводится

$$t = t_0 - \tilde{t}, \qquad t_0 = \frac{\gamma(L)}{kL}.$$

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial\tilde{t}} = -\dfrac{\partial}{\partial t}$ и из (3) получается

$$2i\,(-W_t) - W_{\psi\psi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2i\,W_t + W_{\psi\psi} = 0.$$

6. Границы области в (t, ψ)

Из $\psi = \sigma/\tilde{\xi}$ следует $0 < \psi < \gamma(L)$.

По переменной t: при $\xi \geq 0$ имеем $\tilde{\xi} = \xi + L/\gamma(L) \geq L/\gamma(L)$, значит

$$\tilde{t} = \frac{1}{k\tilde{\xi}} \leq \frac{1}{k(L/\gamma(L))} = \frac{\gamma(L)}{kL} = t_0.$$

Кроме того, при $\xi \to +\infty$ имеем $\tilde{\xi} \to +\infty$, значит $\tilde{t} \to 0$, то есть $t = t_0 - \tilde{t}$ пробегает диапазон

$$0 < t < t_0 = \frac{\gamma(L)}{kL}.$$

7. Начальное условие $W(0, \psi)$

Нужно выразить условие из (1.4.15) через W.

При $\xi = 0$:

$$\tilde{\xi} = \frac{L}{\gamma(L)}, \qquad \tilde{t} = \frac{1}{k\tilde{\xi}} = \frac{\gamma(L)}{kL} = t_0, \qquad t = t_0 - \tilde{t} = 0.$$

Также

$$\psi = \frac{\sigma}{\tilde{\xi}} = \sigma\,\frac{\gamma(L)}{L}.$$

Но при $\xi = 0$ область параметров совпадает с $s \in [0, L]$ и $\sigma = s$, поэтому

$$s = \sigma = \frac{L}{\gamma(L)}\,\psi.$$

Теперь используем связь между V и W из (1.4.16). При $\xi = 0$:

$$\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\,\tilde{\xi}} = \sqrt{\frac{\gamma(L)}{L} \cdot \frac{L}{\gamma(L)}} = 1, \qquad \frac{\sigma^2}{2\tilde{\xi}} = \frac{s^2}{2(L/\gamma(L))} = \frac{\gamma(L)}{2L}\,s^2.$$

Из (1.4.16) следует (при $\xi = 0$) $V(0, s) = e^{ik\frac{s^2}{2\tilde{\xi}}}\,W(0, \psi)$, то есть

$$W(0, \psi) = V(0, s)\exp\!\left(-ik\frac{s^2}{2\tilde{\xi}}\right).$$

Подставляя условие из (1.4.15) и $s = \dfrac{L}{\gamma(L)}\psi$:

$$W(0, \psi) = u_0(s)\exp\!\left(ik\int_0^s \gamma(s')\,ds'\right)\,\exp\!\left(-ik\,\frac{\gamma(L)}{2L}\,s^2\right)$$

$$= u_0\!\left(\frac{L\psi}{\gamma(L)}\right)\exp\!\left(ik\left[\int_0^{\frac{L\psi}{\gamma(L)}} \gamma(s')\,ds' - \frac{L}{2\gamma(L)}\,\psi^2\right]\right).$$

8. Итоговая задача (1.4.18)

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$
\begin{cases}
2i\,\dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = 0, \qquad 0 < t < \dfrac{\gamma(L)}{kL}, \;\; 0 < \psi < \gamma(L), \\[2ex]
\qquad W(0,\psi) = u_0\!\left(\dfrac{L\psi}{\gamma(L)}\right) \exp\!\left(ik \left[\displaystyle\int_0^{\frac{L\psi}{\gamma(L)}} \gamma(s')\,ds' - \dfrac{L}{2\gamma(L)}\,\psi^2 \right] \right).
\end{cases}
\tag{1.4.18}
$$

9. Конечный результат (1.4.19): восстановление $u(\xi, s)$

Далее последовательно восстанавливаются функции, используя определения:

$$
U(\xi,\sigma) = u(\xi,s), \qquad \sigma = s + \xi\gamma(s),
$$

и связь из (1.4.14):

$$
U(\xi,\sigma) = V(\xi,\sigma)\exp\!\left(-ik\int_0^{\sigma}\Gamma(\xi,\sigma')\,d\sigma'\right), \quad \Gamma(\xi,\sigma) = \gamma(s(\xi,\sigma)).
$$

Интеграл по σ переводится в интеграл по s. Так как

$$
d\sigma = h_s(\xi,s)\,ds = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right)ds, \qquad \Gamma(\xi,\sigma) = \gamma(s),
$$

то

$$
\int_0^{\sigma}\Gamma(\xi,\sigma')\,d\sigma' = \int_0^{s}\gamma(s')\left(1 + \frac{\xi}{\rho(s')}\right)ds'.
$$

Кроме того, из (1.4.16) и $\tilde{\xi} = \xi + \dfrac{L}{\gamma(L)}$ получаем:

$$
V(\xi,\sigma) = \frac{e^{ik\frac{\sigma^2}{2\tilde{\xi}}}}{\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\,\tilde{\xi}}}\,W(t,\psi).
$$

Здесь

$$
\psi = \frac{\sigma}{\tilde{\xi}} = \frac{s + \xi\gamma(s)}{\xi + \frac{L}{\gamma(L)}}, \qquad t = t_0 - \frac{1}{k\tilde{\xi}} = \frac{\gamma(L)}{kL} - \frac{1}{k\left(\xi + \frac{L}{\gamma(L)}\right)}.
$$

Заметим, что

$$
\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\,\tilde{\xi}} = \sqrt{\frac{\gamma(L)}{L}\left(\xi + \frac{L}{\gamma(L)}\right)} = \sqrt{1 + \frac{\xi}{L}\gamma(L)}.
$$

Итак,

$$
u(\xi,s) = U(\xi,\sigma) = V(\xi,\sigma)\exp\!\left(-ik\int_0^{s}\gamma(s')\left(1 + \frac{\xi}{\rho(s')}\right)ds'\right).
$$

Подставляя V и объединяя фазовые множители, получаем

$$u(\xi, s) = \frac{W(t,\psi)}{\sqrt{1+\frac{\xi}{L}\gamma(L)}}\, e^{ikP(\xi,s)}, \tag{1.4.19a}$$

где

$$P(\xi, s) = \frac{\left[s+\xi\gamma(s)\right]^2}{2\left[\xi+\frac{L}{\gamma(L)}\right]} - \int_0^s \gamma(s')\left(1+\frac{\xi}{\rho(s')}\right)\, ds'. \tag{1.4.19b}$$

Формулы 1.4.19a - 1.4.19b составляют конечный результат (1.4.19).