Получение (1.4.15) из (1.4.14)

1. Ввод новых функций и запись уравнения для U

Вводим новые функции:

$$\Gamma(\xi,\sigma) = \gamma\big(s(\xi,\sigma)\big); \qquad R(\xi,\sigma) = \rho\big(s(\xi,\sigma)\big); \qquad U(\xi,\sigma) = u(\xi,s). \tag{1.4.13}$$

Тогда (после перехода к переменной σ) параболическое уравнение Малюжинца принимает вид:

$$ik\left(2\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\Gamma\frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{U}{R+\xi}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} = 0, \qquad U(0,\sigma) = u_0(\sigma). \tag{1.4.14}$$

Далее требуется получить уравнение для функции V.

2. Подстановка $U = V\exp\big(-ik\int_0^\sigma \Gamma\, d\sigma'\big)$

Введём фазовую функцию

$$\Phi(\xi,\sigma) = \int_0^\sigma \Gamma(\xi,\sigma')\, d\sigma'$$

и сделаем подстановку

$$U(\xi,\sigma) = V(\xi,\sigma)\, e^{-ik\Phi(\xi,\sigma)} = V(\xi,\sigma)\exp\left(-ik\int_0^\sigma \Gamma(\xi,\sigma')\, d\sigma'\right). \tag{1}$$

2.1. Производные U_σ, $U_{\sigma\sigma}$, U_ξ

Так как $\Phi_\sigma = \Gamma$, то

$$U_\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}\Big(Ve^{-ik\Phi}\Big) = e^{-ik\Phi}\Big(V_\sigma - ik\Phi_\sigma V\Big) = e^{-ik\Phi}\Big(V_\sigma - ik\Gamma V\Big).$$

Вторая производная:

$$\begin{aligned} U_{\sigma\sigma} &= \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[e^{-ik\Phi}\big(V_\sigma - ik\Gamma V\big)\right] \\ &= e^{-ik\Phi}\left[V_{\sigma\sigma} - ik\Gamma_\sigma V - 2ik\Gamma V_\sigma - k^2\Gamma^2 V\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Производная по ξ при фиксированном σ:

$$U_\xi = \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(Ve^{-ik\Phi}\Big) = e^{-ik\Phi}\Big(V_\xi - ik\Phi_\xi V\Big), \qquad \Phi_\xi = \int_0^\sigma \Gamma_\xi(\xi,\sigma')\, d\sigma'.$$

2.2. Подстановка в (1.4.14) и первое сокращение

Подставляется (1)–(2) в (1.4.14) и делится на ненулевой множитель $e^{-ik\Phi}$. Получается:

$$0 = ik\left[2\left(V_\xi - ik\Phi_\xi V\right) + 2\Gamma\left(V_\sigma - ik\Gamma V\right) + \frac{V}{R+\xi}\right] + \left[V_{\sigma\sigma} - ik\Gamma_\sigma V - 2ik\Gamma V_\sigma - k^2\Gamma^2 V\right]. \tag{3}$$

Сгруппируем члены с V_σ: в (3) присутствуют $+ik \cdot 2\Gamma V_\sigma$ и $-2ik\Gamma V_\sigma$, они взаимно уничтожаются. Поэтому (3) упрощается до:

$$V_{\sigma\sigma} + 2ik\,V_\xi + \underbrace{\left(2k^2\Phi_\xi + k^2\Gamma^2\right)}_{\text{потенциальный член}} V + \underbrace{\left(\frac{ik}{R+\xi} - ik\Gamma_\sigma\right)}_{\text{нулевой член}} V = 0. \tag{4}$$

3. Два ключевых тождества для Γ

Далее используются тождества, следующие из определения

$$\sigma = s + \xi\,\gamma(s), \qquad \Gamma(\xi,\sigma) = \gamma\big(s(\xi,\sigma)\big), \qquad R(\xi,\sigma) = \rho\big(s(\xi,\sigma)\big).$$

3.1. Тождество $\Gamma_\sigma = \dfrac{1}{R+\xi}$

Из $\Gamma = \gamma(s(\xi,\sigma))$:

$$\Gamma_\sigma = \gamma'(s)\,s_\sigma.$$

Но

$$\gamma'(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \frac{1}{R}, \qquad \sigma_s = \frac{\partial\sigma}{\partial s} = 1 + \xi\gamma'(s) = 1 + \frac{\xi}{R} = \frac{R+\xi}{R}, \qquad s_\sigma = \frac{1}{\sigma_s} = \frac{R}{R+\xi}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_\sigma = \frac{1}{R}\cdot\frac{R}{R+\xi} = \frac{1}{R+\xi}. \tag{5}$$

Из (5) сразу следует, что нулевой член в (4) исчезает:

$$\frac{ik}{R+\xi} - ik\Gamma_\sigma = 0.$$

3.2. Тождество $2\Phi_\xi + \Gamma^2 = 0$

Сначала найдём Γ_ξ при фиксированном σ. Дифференцируем тождество $\sigma = s+\xi\gamma(s)$ по ξ при фиксированном σ:

$$0 = s_\xi + \gamma(s) + \xi\gamma'(s)\,s_\xi \quad\Longrightarrow\quad s_\xi\big(1+\xi\gamma'(s)\big) = -\gamma(s).$$

Так как $1 + \xi\gamma'(s) = \dfrac{R+\xi}{R}$ и $\gamma(s) = \Gamma$, получаем

$$s_\xi = -\Gamma \cdot \frac{R}{R+\xi}.$$

Тогда

$$\Gamma_\xi = \gamma'(s)\, s_\xi = \frac{1}{R}\left(-\Gamma \cdot \frac{R}{R+\xi}\right) = -\frac{\Gamma}{R+\xi}.$$

С учётом (5) это переписывается в виде

$$\Gamma_\xi = -\Gamma\,\Gamma_\sigma. \tag{6}$$

Теперь вычислим Φ_ξ:

$$\Phi_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\sigma \Gamma(\xi,\sigma')\,d\sigma' = \int_0^\sigma \Gamma_\xi(\xi,\sigma')\,d\sigma'.$$

Подставляя (6):

$$\Phi_\xi = -\int_0^\sigma \Gamma(\xi,\sigma')\,\Gamma_\sigma(\xi,\sigma')\,d\sigma' = -\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma'}\Big(\Gamma(\xi,\sigma')^2\Big)\,d\sigma'.$$

Следовательно,

$$\Phi_\xi = -\frac{1}{2}\Big(\Gamma(\xi,\sigma)^2 - \Gamma(\xi,0)^2\Big).$$

Так как при $s = 0$ имеем $\gamma(0) = 0$, то $\Gamma(\xi,0) = 0$, и потому

$$\Phi_\xi = -\frac{1}{2}\,\Gamma^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\Phi_\xi + \Gamma^2 = 0. \tag{7}$$

Значит, потенциальный член в (4) также исчезает:

$$2k^2\Phi_\xi + k^2\Gamma^2 = k^2\big(2\Phi_\xi + \Gamma^2\big) = 0.$$

4. Итоговое уравнение и граничное условие для V

После сокращений по (5) и (7) из (4) получается

$$\boxed{2ik\,\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = 0}$$

Область изменения σ получается из $\sigma = s + \xi\gamma(s)$ при $0 \le s \le L$:

$$0 \le \sigma \le L + \xi\,\gamma(L), \qquad \xi \ge 0.$$

Начальное условие при $\xi = 0$: из (1) при $\xi = 0$ имеем $\sigma = s$, $\Gamma(0,\sigma) = \gamma(\sigma)$ и

$$U(0,\sigma) = u_0(\sigma) = V(0,\sigma)\exp\!\left(-ik\int_0^\sigma \gamma(\sigma')\,d\sigma'\right).$$

Следовательно,

$$V(0,\sigma) = u_0(\sigma)\exp\left(ik\int_0^\sigma \gamma(\sigma')\,d\sigma'\right).$$

Итак, получена задача для функции V:

$$\begin{cases} 2ik\,\dfrac{\partial V}{\partial \xi} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = 0, \qquad 0 \le \sigma \le L + \xi\,\gamma(L),\ \ \xi \ge 0, \\[2ex] \qquad V(0,\sigma) = u_0(\sigma)\exp\left(ik\displaystyle\int_0^\sigma \gamma(\sigma')\,d\sigma'\right). \end{cases} \tag{1.4.15}$$