

Теоретические основы и вычислительная эволюция метода параболического приближения в гидроакустике

Введение

Развитие современной гидроакустики как научной дисциплины неразрывно связано с поиском баланса между точностью математического описания волновых процессов и вычислительной эффективностью алгоритмов.[1] Океан представляет собой сложную динамическую среду, характеризующуюся значительной пространственно-временной изменчивостью скорости звука, сложным рельефом дна и наличием случайных неоднородностей.[1, 1] В этих условиях прямое решение полной эллиптической задачи Гельмгольца для волновых полей на больших дистанциях становится вычислительно избыточным и зачастую практически невозможным из-за колоссальных затрат ресурсов.[2, 3] Настоящий отчет посвящен детальному анализу метода параболического уравнения (PE — Parabolic Equation), который стал революционным инструментом в прикладной акустике океана, начиная с классических работ Фреда Тапперта середины 1970-х годов.[4, 1]

1 Историческая ретроспектива и методологическая необходимость

До появления параболического приближения основными инструментами моделирования в гидроакустике были лучевая теория и метод нормальных волн.[1, 1] Лучевая теория, базирующаяся на высокочастотном приближении (уравнения эйконала и переноса), эффективна для описания траекторий распространения энергии, но полностью игнорирует дифракционные эффекты и теряет точность в зонах каустик и теней.[1, 1] Метод нормальных волн, напротив, обеспечивает точное волновое решение для стратифицированных сред, однако его применение в горизонтально-неоднородном океане требует сложных процедур согласования мод или адиабатических приближений, что резко увеличивает вычислительную сложность.[5, 1]

Метод параболического уравнения, представленный Фредом Таппертом в 1977 году в рамках лекций в Springer-Verlag, предложил принципиально иной подход.[4, 1] Тапперт обосновал, что для условий дальнего распространения звука в океанических волноводах, таких как канал SOFAR, волновое поле распространяется преимущественно под малыми углами к горизонту.[1] Это геометрическое свойство позволяет свести эллиптическое уравнение Гельмгольца к параболическому типу, что превращает краевую

задачу в задачу с начальными значениями по дальности.[6] В результате вместо одновременного решения системы уравнений во всем объеме расчетной области становится возможным «марширующий» алгоритм, последовательно вычисляющий поле от одного шага по дистанции к другому.[7, 8]

Таблица 1: Сравнение полного уравнения Гельмгольца и параболического приближения

Параметр сравнения	Уравнение Гельмгольца	Параболическое приближение (PE)
Тип уравнения	Эллиптическое (2-й порядок по всем осям)	Параболическое (1-й порядок по дальности)
Вычислительная сложность	Высокая (зависит от объема области)	Линейная относительно дальности [9]
Учет обратного рассеяния	Полный	Обычно игнорируется (одностороннее)
Ограничения по углам	Отсутствуют	Ограничено параксиальным приближением
Применимость	Ближняя зона, сложные препятствия	Дальнее распространение в волноводах [1]

Историческая значимость статьи Тапперта заключается в том, что он не только предложил математический аппарат, но и внедрил эффективный численный алгоритм — метод расщепления по шагам Фурье (Split-Step Fourier, SSF), который обеспечил безусловную устойчивость и высокую скорость вычислений.[6, 10]

2 Физические основы и канал SOFAR

Эффективность метода PE в подводной акустике обусловлена существованием глубоководного звукового канала (SOFAR), который действует как естественный волновод.[1] Канал SOFAR удерживает акустическую энергию внутри толщи воды за счет рефракции, минимизируя потери при взаимодействии с поглощающим дном.[1] Геометрия этого канала — малая вертикальная протяженность (4–5 км) по сравнению с огромной горизонтальной длиной (десятки и сотни километров) — создает условия, идеально подходящие для параболического упрощения волнового уравнения.[1]

Количественным обоснованием применимости PE служит оценка предельного угла распространения θ_l . Согласно закону Снеллиуса, для типичных океанических условий, где разность скоростей звука составляет около 4%, предельный угол захвата в волновод составляет приблизительно 16° относительно горизонтали.[1] Поскольку большая часть акустической энергии сосредоточена в пределах этого узкого углового спектра, параксиальное (околоосное) приближение оказывается чрезвычайно точным.[11, 1]

3 Математический вывод стандартного уравнения (SPE)

Процесс вывода начинается с уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах (r, z, ϕ) , описывающего гармоническое волновое поле $p(r, z, \phi)e^{-i\omega t}$ [6]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 p = 0 \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c_0$ — опорное волновое число, а $n(r, z, \phi) = c_0/c(r, z, \phi)$ — показатель преломления.[6] Для перехода к параболическому виду Тапперт предложил представить давление как произведение медленно меняющейся огибающей $\psi(r, z, \phi)$ и функции фазы [6, 1]:

$$p(r, z, \phi) \approx P_0 R_0 \sqrt{\frac{1}{r}} \psi(r, z, \phi) e^{ik_0 r} \quad (2)$$

Пренебрежение второй производной огибающей по дальности $\partial^2 \psi / \partial r^2$ приводит к стандартному параболическому уравнению (SPE) [6]:

$$2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad (3)$$

Это уравнение первого порядка по r , что позволяет использовать эффективные «марширующие» алгоритмы.[6]

4 Метод расщепления по шагам Фурье (SSF)

Наиболее распространенным способом решения SPE является алгоритм расщепления по шагам Фурье (SSF), разработанный Хардином и Таппертом.[6] Основная идея заключается в разделении оператора распространения на две части: дифракционную (T_{op}) и рефракционную (U_{op}).[6] Для продвижения решения используется операторная форма:

$$\psi(r + \Delta r) \approx e^{-ik_0 \Delta r (T_{op} + U_{op})} \psi(r) \quad (4)$$

где $T_{op} = -\frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и $U_{op} = -\frac{1}{2}(n^2 - 1)$. [6] Использование FFT позволяет вычислять дифракцию в спектральной области, что обеспечивает сложность $O(N \log N)$ на каждом шаге.[6, 9]

5 Расширения метода РЕ

В работе 1977 года Тапперт подчеркивал, что параболическое приближение применимо и к более сложным сценариям [4, 12]:

- **Распространение импульсов (Pulse Propagation):** Решается либо через спектральный синтез, либо во временной области (TDPE).[4, 13]
- **Движущиеся источники (Moving Sources):** Учет эффектов Доплера через частотные сдвиги или динамическую перестройку начальных условий.[4, 12]
- **Широкоугольные модификации (WAPE):** Использование аппроксимаций Паде для сохранения точности на углах до 60 – 80 градусов.[14, 15]

6 Современные подходы и нейронные сети

В последние годы развиваются методы машинного обучения, такие как нейронные операторы Фурье (FNO).[9] FNO-подход использует спектральные свертки для аппроксимации оператора отображения параметров среды на итоговое поле, что позволяет сократить время вычислений на 25 – 35% по сравнению с традиционными РЕ-солверами при сохранении аналогичной точности.[9]

Заключение

Метод параболического приближения, ставший классикой благодаря работам Фреда Тапперта, остается базовым инструментом вычислительной гидроакустики.[10, 1] Он обеспечивает уникальный баланс между скоростью и физической достоверностью для горизонтально-неоднородных сред, а современные расширения и интеграция с нейросетевыми технологиями гарантируют его актуальность для оперативного прогнозирования акустических полей.[9, 16]