Исходя из этих соотношений, можно записать коэффициенты Ламе:

$$h_\xi = \left| \frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial \xi} \right| = 1; \qquad h_s = \left| \frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial s} \right| = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = h(\xi, s). \tag{1.4.10}$$

Переход к ортогональным координатам (ξ, s). В окрестности контура вводится отображение

$$\vec{r}(\xi, s) = \vec{a}(s) + \xi\, \vec{n}(s),$$

где s - длина дуги, ξ - координата вдоль нормали, $\vec{a}(s)$ - радиус-вектор точки контура, $\vec{n}(s)$ — единичная нормаль.

В ортогональных координатах $(q_1, q_2) = (\xi, s)$ при коэффициентах Ламе h_ξ, h_s лапласиан скалярной функции $F(\xi, s)$ имеет вид

$$\Delta F = \frac{1}{h_\xi h_s} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_s}{h_\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_\xi}{h_s} \frac{\partial F}{\partial s} \right) \right]. \tag{1}$$

Так как $h_\xi = 1$, формула упрощается:

$$\Delta F = \frac{1}{h_s} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_s \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h_s} \frac{\partial F}{\partial s} \right) \right]. \tag{2}$$

Уравнение Гельмгольца. Рассматривается уравнение

$$\Delta E + k^2 E = 0. \tag{3}$$

Рассматриваем поле E в виде: $E = u \cdot e^{ik\xi}$. (Такое представление наиболее адекватно случаю дальней зоны, хотя им можно успешно пользоваться и в ближней зоне. Параболическое уравнение Малюжинца имеет вид:

$$ik \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h_s} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0; \qquad u(0, s) = u_0(s). \tag{1.4.11}$$

Оно получено подстановкой новых переменных в уравнение Гельмгольца $\Delta E + k^2 E = 0$, и отбрасыванием члена, содержащего вторую производную по ξ.)

Далее требуется получить полное уравнение без отбрасывания второй производной по ξ.

Пусть

$$E(\xi, s) = u(\xi, s)\, e^{ik\xi}.$$

Шаг 1: производные по ξ.

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = e^{ik\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + ik\, u \right).$$

Вторая производная:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{ik\xi} \left(u_\xi + ik\, u \right) \right] \\ &= ik\, e^{ik\xi} \left(u_\xi + ik\, u \right) + e^{ik\xi} \left(u_{\xi\xi} + ik\, u_\xi \right) \\ &= e^{ik\xi} \left(u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi - k^2 u \right). \end{aligned}$$

Шаг 2: производные по s. Так как ξ и s независимы, то

$$\frac{\partial E}{\partial s} = e^{ik\xi}\, u_s.$$

Шаг 3: вычисление $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(h_s \dfrac{\partial E}{\partial \xi}\right)$. Так как $h_s = h(\xi, s) = 1 + \dfrac{\xi}{\rho(s)}$, то

$$\frac{\partial h_s}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho(s)}.$$

Теперь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_s \frac{\partial E}{\partial \xi}\right) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[h_s\, e^{ik\xi}\,(u_\xi + ik\,u)\right] \\
&= \left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right) e^{ik\xi}\,(u_\xi + ik\,u) + h_s\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left[e^{ik\xi}\,(u_\xi + ik\,u)\right] \\
&= \left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right) e^{ik\xi}\,(u_\xi + ik\,u) + h_s\, e^{ik\xi}\left(u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi - k^2 u\right).
\end{aligned}$$

Шаг 4: вычисление $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{h_s}\dfrac{\partial E}{\partial s}\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial E}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\, e^{ik\xi} u_s\right) = e^{ik\xi}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s} u_s\right),$$

поскольку $e^{ik\xi}$ не зависит от s.

Шаг 5: подстановка в лапласиан. Из (2) получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{h_s}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_s \frac{\partial E}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial E}{\partial s}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h_s}\left[\left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right) e^{ik\xi}\,(u_\xi + ik\,u) + h_s\, e^{ik\xi}\left(u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi - k^2 u\right) + e^{ik\xi}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s} u_s\right)\right].
\end{aligned}$$

Шаг 6: подстановка в уравнение Гельмгольца. Подставляется в (3):

$$\Delta E + k^2 E = 0.$$

Так как $E = u e^{ik\xi}$, то после деления на $e^{ik\xi}$ получается

$$0 = \frac{1}{h_s}\left[\left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right)(u_\xi + ik\,u) + h_s\left(u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi - k^2 u\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s} u_s\right)\right] + k^2 u.$$

Члены $-k^2 u$ и $+k^2 u$ сокращаются, и остаётся **полное уравнение**:

$$u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi + \frac{1}{h_s}\left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right) u_\xi + ik\,\frac{1}{h_s}\left(\frac{\partial h_s}{\partial \xi}\right) u + \frac{1}{h_s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0. \tag{4}$$

Подстановка $h_s = 1 + \dfrac{\xi}{\rho(s)}$. Так как

$$\frac{\partial h_s}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho(s)}, \qquad \frac{1}{h_s}\frac{\partial h_s}{\partial \xi} = \frac{1/\rho(s)}{1 + \xi/\rho(s)} = \frac{1}{\rho(s) + \xi},$$

уравнение (4) можно записать в эквивалентной форме:

$$u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, u_\xi + ik\, \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, u + \frac{1}{h_s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h_s}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0, \qquad h_s = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}. \quad (5)$$

Связь с (1.4.11). Если в (4) отбросить член $u_{\xi\xi}$ (и, как обычно в параболическом приближении, малый по сравнению с $2ik\, u_\xi$ член $\dfrac{1}{h_s}\dfrac{\partial h_s}{\partial \xi} u_\xi$), то получается параболическое уравнение Малюжинца (1.4.11).