A1.1. Геометрия: гладкий контур, натуральный параметр и репер Френе

В этом пункте вводятся базовые геометрические объекты, которые далее используются при переходе к криволинейным координатам около контура и при выводе уравнения в естественных координатах (ξ, s).

Зачем нужен этот пункт. Далее поле будет рассматриваться не в декартовых координатах (x, y), а в координатах, связанных с гладким контуром:

- одна координата идёт вдоль контура (натуральная координата s),
- вторая — по нормали к контуру (координата ξ).

Чтобы корректно ввести такие координаты, сначала нужно строго определить:

- касательный вектор,
- нормальный вектор,
- кривизну,
- радиус кривизны,
- формулы Френе.

Гладкий контур и параметризация. Рассматривается гладкий контур (плоская кривая)

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^2.$$

Пусть кривая задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda), \qquad \lambda \in [a, b],$$

где λ — некоторый параметр (не обязательно длина дуги).

Чтобы можно было ввести касательное направление, предполагается, что кривая регулярна:

$$\mathbf{r}'(\lambda) \neq 0 \quad \text{для всех } \lambda \in [a, b].$$

Переход к натуральному параметру (длине дуги). Для дальнейших выводов удобнее использовать не произвольный параметр λ, а длину дуги s (натуральный параметр). Она определяется формулой

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\mathbf{r}'(\mu)| \, d\mu,$$

где λ_0 — фиксированная начальная точка.

Из этой формулы сразу следует

$$\frac{ds}{d\lambda} = |\mathbf{r}'(\lambda)| > 0.$$

Так как производная положительна, функция $s(\lambda)$ монотонна, значит можно перейти к обратной функции $\lambda = \lambda(s)$ и переписать кривую как

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \qquad 0 \leq s \leq L,$$

где

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(\lambda)| \, d\lambda$$

— полная длина контура.

Почему в натуральной параметризации $|\mathbf{r}'(s)| = 1$. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/d\lambda}{ds/d\lambda} = \frac{\mathbf{r}'(\lambda)}{|\mathbf{r}'(\lambda)|}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{r}'(\lambda)|}{|\mathbf{r}'(\lambda)|} = 1.$$

То есть в натуральной параметризации

$$|\mathbf{r}'(s)| = 1. \tag{1}$$

Единичный касательный вектор. Вводится обозначение

$$\boldsymbol{\tau}(s) := \mathbf{r}'(s). \tag{2}$$

Из (1) немедленно получаем

$$|\boldsymbol{\tau}(s)| = 1.$$

Единичный нормальный вектор. Так как задача плоская, нормальный вектор можно получить поворотом касательного на угол $\pm\pi/2$. Если

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \big(\tau_1(s), \tau_2(s)\big),$$

то один из двух единичных нормальных векторов можно взять в виде

$$\mathbf{n}(s) = \big(-\tau_2(s), \tau_1(s)\big).$$

(Другой возможный выбор — $\mathbf{n}(s) = (\tau_2, -\tau_1)$; это соответствует другой ориентации.)

По построению:

$$\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0, \qquad |\mathbf{n}(s)| = 1.$$

То есть $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ образуют ортонормированный репер Френе.

Почему $\boldsymbol{\tau}'(s)$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}(s)$. Так как $|\boldsymbol{\tau}(s)| = 1$, имеем

$$\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) = 1.$$

Дифференцируем по s:

$$\frac{d}{ds}\big(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\,\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0.$$

Значит,

$$\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}'(s) = 0. \tag{3}$$

То есть $\boldsymbol{\tau}'(s)$ перпендикулярен касательной и направлен вдоль нормали $\mathbf{n}(s)$.

Следовательно, существует скалярная функция $\kappa(s)$ такая, что

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{n}(s). \tag{4}$$

Кривизна и радиус кривизны. Коэффициент $\kappa(s)$ в (4) называется кривизной кривой. В дипломе удобно использовать радиус кривизны $\rho(s)$:

$$\kappa(s) = \frac{1}{\rho(s)}. \tag{5}$$

Тогда (4) переписывается как

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = \frac{1}{\rho(s)}\,\mathbf{n}(s). \tag{6}$$

Вывод формулы для $\mathbf{n}'(s)$. Используем два факта:

$$\mathbf{n}(s)\cdot\mathbf{n}(s)=1, \qquad \boldsymbol{\tau}(s)\cdot\mathbf{n}(s)=0.$$

Шаг 1. Из $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0 \quad\Longrightarrow\quad 2\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=0.$$

Значит, $\mathbf{n}'(s)$ направлен вдоль $\boldsymbol{\tau}(s)$:

$$\mathbf{n}'(s)=a(s)\,\boldsymbol{\tau}(s).$$

Шаг 2. Дифференцируем ортогональность $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}=0$:

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})=0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\tau}'\cdot\mathbf{n}+\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}'=0.$$

Подставляем (6) и $\mathbf{n}'=a\boldsymbol{\tau}$:

$$\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{n}+\boldsymbol{\tau}\cdot(a\boldsymbol{\tau})=0.$$

Так как $|\mathbf{n}|=1$ и $|\boldsymbol{\tau}|=1$, получаем

$$\frac{1}{\rho}+a=0.$$

Значит,

$$a(s)=-\frac{1}{\rho(s)}.$$

Итак,

$$\mathbf{n}'(s)=-\frac{1}{\rho(s)}\,\boldsymbol{\tau}(s). \tag{7}$$

Итог (формулы Френе–Серре в плоскости). Собирая (6) и (7), получаем

$$\boldsymbol{\tau}'(s)=\frac{1}{\rho(s)}\,\mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{n}'(s)=-\frac{1}{\rho(s)}\,\boldsymbol{\tau}(s). \tag{8}$$

Почему это важно дальше. Эти формулы нужны в следующем пункте для вычисления производной

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(\mathbf{r}(s)+\xi\mathbf{n}(s)\big),$$

то есть для получения коэффициентов Ламе в координатах (ξ,s). Именно оттуда появится множитель

$$1+\frac{\xi}{\rho(s)},$$

который затем войдёт в оператор Лапласа и в уравнение Гельмгольца в криволинейных координатах.

Что должно быть понятно после этого пункта. После A1.1 должны быть понятны:

1. что такое натуральный параметр s и почему $|\mathbf{r}'(s)| = 1$;
2. откуда берутся векторы $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$;
3. почему $\boldsymbol{\tau}'(s)$ направлен по нормали;
4. почему коэффициент при $\mathbf{n}(s)$ — это кривизна $\kappa(s) = 1/\rho(s)$;
5. откуда следует формула для $\mathbf{n}'(s)$;
6. почему всё это нужно для следующего шага (координаты (ξ, s) и оператор Лапласа).

A1.2. Естественные координаты (ξ, s) около контура и коэффициенты Ламе

В этом пункте вводятся криволинейные координаты (ξ, s) в окрестности гладкого контура Г и подробно выводятся коэффициенты Ламе. Именно здесь появляется геометрический множитель

$$1 + \frac{\xi}{\rho(s)},$$

который затем входит в оператор Лапласа и в уравнение Гельмгольца в естественных координатах.

Что уже известно из пункта A1.1. Из A1.1 введены:

- натуральная параметризация контура $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \le s \le L$;
- единичные векторы репера Френе:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{r}'(s), \qquad \mathbf{n}(s), \qquad |\boldsymbol{\tau}(s)| = 1, \quad |\mathbf{n}(s)| = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0;$$

- формулы Френе:

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = \frac{1}{\rho(s)}\,\mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{n}'(s) = -\frac{1}{\rho(s)}\,\boldsymbol{\tau}(s).$$

Замечание о знаке (важно для совпадения с дипломом). При разных выборах ориентации нормали $\mathbf{n}(s)$ и знака координаты ξ в формулах может появляться либо

$$1 - \frac{\xi}{\rho(s)},$$

либо

$$1 + \frac{\xi}{\rho(s)}.$$

Ниже фиксируется запись *в обозначениях диплома*:

$$h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}. \tag{9}$$

Если в предыдущем черновике была выбрана противоположная ориентация нормали, это эквивалентно замене $\xi \mapsto -\xi$; все дальнейшие формулы при этом приводятся к виду (9).

Введение естественных координат. Точка в окрестности контура задаётся как смещение от точки $\mathbf{r}(s)$ вдоль нормали:

$$\mathbf{x}(\xi, s) = \mathbf{r}(s) + \xi\,\mathbf{n}(s). \tag{10}$$

Здесь:

- s — координата вдоль контура (длина дуги),
- ξ — координата по нормали (подписанное расстояние до контура).

При $\xi = 0$ получаем сам контур:

$$\mathbf{x}(0, s) = \mathbf{r}(s).$$

A1.2.1. Базисные векторы координатных линий

Чтобы получить метрику, вычислим производные отображения (10) по ξ и по s.

Производная по ξ. Так как $\mathbf{r}(s)$ не зависит от ξ и $\mathbf{n}(s)$ тоже не зависит от ξ, имеем:

$$\mathbf{x}_\xi(\xi, s) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \mathbf{n}(s). \tag{11}$$

Следовательно,

$$|\mathbf{x}_\xi| = |\mathbf{n}(s)| = 1.$$

Это означает, что в направлении ξ коэффициент Ламе равен 1.

Производная по s. Теперь дифференцируем (10) по s:

$$\mathbf{x}_s(\xi, s) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{r}'(s) + \xi\,\mathbf{n}'(s).$$

Из A1.1:

$$\mathbf{r}'(s) = \boldsymbol{\tau}(s).$$

Подставляя это и формулу Френе для $\mathbf{n}'(s)$, получаем

$$\mathbf{x}_s(\xi, s) = \boldsymbol{\tau}(s) + \xi\,\mathbf{n}'(s).$$

С учётом выбора ориентации, согласованного с записью (9), получаем итоговый вид

$$\mathbf{x}_s(\xi, s) = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right)\boldsymbol{\tau}(s). \tag{12}$$

Пояснение, почему коэффициент именно такой. Смысл формулы (12) очень важный: при движении вдоль контура (по s) на расстоянии ξ от него "масштаб длины" меняется. Если исходный элемент длины на контуре равен ds, то на смещённой линии $\xi = \mathrm{const}$ он становится

$$d\ell_s = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) ds.$$

То есть линии, удалённые от контура, имеют другой локальный масштаб вдоль касательного направления.

A1.2.2. Ортогональность координат (ξ, s)

Проверим, что координаты ортогональны.

Из (11) и (12):

$$\mathbf{x}_\xi = \mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{x}_s = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) \boldsymbol{\tau}(s).$$

Тогда скалярное произведение равно

$$\mathbf{x}_\xi \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{n}(s) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) \boldsymbol{\tau}(s) = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) \big(\mathbf{n}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s)\big) = 0,$$

так как $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$.

Следовательно, система координат (ξ, s) является *ортогональной*.

A1.2.3. Коэффициенты Ламе

По определению коэффициенты Ламе в ортогональной системе координат — это длины базисных векторов координатных линий:

$$h_\xi(\xi, s) = |\mathbf{x}_\xi(\xi, s)|, \qquad h_s(\xi, s) = |\mathbf{x}_s(\xi, s)|.$$

Коэффициент Ламе вдоль ξ. Из (11):

$$h_\xi(\xi, s) = |\mathbf{x}_\xi| = |\mathbf{n}(s)| = 1. \tag{13}$$

Коэффициент Ламе вдоль s. Из (12) и $|\boldsymbol{\tau}(s)| = 1$:

$$h_s(\xi, s) = \left| \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) \boldsymbol{\tau}(s) \right| = \left| 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} \right| \, |\boldsymbol{\tau}(s)|.$$

Так как $|\boldsymbol{\tau}(s)| = 1$, получаем

$$h_s(\xi, s) = \left| 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} \right|.$$

В рабочей окрестности контура предполагается

$$1 + \frac{\xi}{\rho(s)} > 0,$$

поэтому модуль можно снять, и окончательно:

$$h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = \frac{\rho(s) + \xi}{\rho(s)}. \tag{14}$$

Итог по коэффициентам Ламе. Итак, в естественных координатах (ξ, s):

$$\boxed{h_\xi(\xi, s) = 1, \qquad h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}.} \tag{15}$$

A1.2.4. Метрика и элемент длины

Так как координаты ортогональны, квадрат элементарной длины имеет вид

$$d\ell^2 = h_\xi^2\, d\xi^2 + h_s^2\, ds^2.$$

Подставляя (15), получаем

$$d\ell^2 = d\xi^2 + \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right)^2 ds^2. \tag{16}$$

Это означает:

- по нормали длина измеряется “обычно” (коэффициент 1),
- вдоль контура локальный масштаб изменяется множителем $1 + \xi/\rho(s)$.

A1.2.5. Якобиан и элемент площади

В ортогональной системе координат элемент площади равен

$$dA = h_\xi h_s\, d\xi\, ds.$$

С учётом (15):

$$dA = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds. \tag{17}$$

Эта формула далее будет использоваться:

- при записи интегральных норм (например, L_2),
- при вычислении невязок и энергетических величин,
- при переходе к оператору Лапласа.

A1.2.6. Область корректности координат (невырожденность)

Чтобы система координат (ξ, s) была корректной, необходимо:

1. чтобы отображение (10) было взаимно-однозначным (локально);
2. чтобы не обращался в нуль коэффициент Ламе $h_s(\xi, s)$.

Из (14) условие невырожденности:

$$h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(s) + \xi \neq 0.$$

Практически достаточно работать в трубчатой окрестности

$$|\xi| < \rho_{\min}, \qquad \rho_{\min} := \min_{s \in [0,L]} \rho(s), \tag{18}$$

тогда $h_s > 0$ и координаты не вырождаются.

Геометрический смысл ограничения $|\xi| < \rho_{\min}$. Если $|\xi|$ становится слишком большим, нормальные лучи из разных точек контура могут пересечься. В этот момент координаты (ξ, s) перестают быть однозначными. Именно поэтому весь вывод для уравнения в естественных координатах выполняется в достаточно узкой окрестности контура.

A1.2.7. Почему этот пункт критически важен для дальнейшего вывода PDE

Формулы (15)–(17) являются основой для следующего шага: вычисления оператора Лапласа в координатах (ξ, s).

Именно из коэффициентов Ламе возникают коэффициенты вида

$$\frac{1}{\rho(s)+\xi}, \qquad \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2,$$

которые затем появляются:

- в точном уравнении Гельмгольца в естественных координатах;
- в уравнении для огибающей $u(\xi, s)$;
- в параболической модели (после параболизации).

Что должно быть понятно после A1.2. После этого пункта должно быть полностью понятно:

1. как вводится отображение $\mathbf{x}(\xi, s) = \mathbf{r}(s) + \xi\mathbf{n}(s)$;
2. как вычисляются $\mathbf{x}_\xi$ и $\mathbf{x}_s$;
3. почему координаты (ξ, s) ортогональны;
4. откуда берутся коэффициенты Ламе $h_\xi = 1$ и $h_s = 1 + \xi/\rho(s)$;
5. почему элемент площади равен $dA = h_s\, d\xi\, ds$;
6. зачем нужно ограничение $|\xi| < \rho_{\min}$.

A1.3. Оператор Лапласа в естественных координатах (ξ, s): подробный вывод

В этом пункте подробно выводится явный вид оператора Лапласа в координатах (ξ, s), связанных с гладким контуром. Это ключевой шаг перед подстановкой в уравнение Гельмгольца.

Что уже получено в A1.2. В естественных координатах (ξ, s) коэффициенты Ламе имеют вид

$$h_\xi(\xi, s) = 1, \qquad h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = \frac{\rho(s)+\xi}{\rho(s)}.$$

Для краткости в этом пункте введём обозначение

$$h(\xi, s) := h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = \frac{\rho(s)+\xi}{\rho(s)}. \tag{19}$$

Тогда

$$h_\xi = 1, \qquad h_s = h.$$

A1.3.1. Общая формула Лапласиана в ортогональных координатах

Для ортогональной системы координат (q_1, q_2) с коэффициентами Ламе h_1, h_2 оператор Лапласа действует по формуле

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\right]. \tag{20}$$

В нашей задаче:

$$q_1 = \xi, \qquad q_2 = s, \qquad h_1 = h_\xi = 1, \qquad h_2 = h_s = h.$$

Подставляя это в (20), получаем

$$\Delta f = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}\,\frac{\partial f}{\partial s}\right)\right]. \tag{21}$$

Это и есть базовая формула, которую теперь нужно раскрыть полностью.

A1.3.2. Раскрытие первой части: производные по ξ

Рассмотрим первый член:

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \xi}(h\,f_\xi)\,, \qquad \text{где } f_\xi := \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

По правилу произведения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(hf_\xi) = h_\xi f_\xi + h f_{\xi\xi},$$

где

$$f_{\xi\xi} := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \qquad h_\xi := \frac{\partial h}{\partial \xi}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \xi}(hf_\xi) = \frac{h_\xi}{h} f_\xi + f_{\xi\xi}.$$

Теперь вычислим $\dfrac{h_\xi}{h}$ явно.
Из (19):

$$h(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}.$$

При дифференцировании по ξ величина $\rho(s)$ считается константой (так как s фиксировано), поэтому

$$h_\xi = \frac{1}{\rho(s)}.$$

Тогда

$$\frac{h_\xi}{h} = \frac{1/\rho(s)}{1 + \xi/\rho(s)} = \frac{1}{\rho(s) + \xi}.$$

Итак, первая часть даёт

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \xi}(h\,f_\xi) = f_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s) + \xi}\,f_\xi. \tag{22}$$

A1.3.3. Раскрытие второй части: производные по s

Теперь рассмотрим второй член:

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}f_s\right), \qquad \text{где } f_s := \frac{\partial f}{\partial s}.$$

По правилу произведения:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}f_s\right) = \left(\frac{1}{h}\right)_s f_s + \frac{1}{h}f_{ss},$$

где

$$f_{ss} := \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \qquad \left(\frac{1}{h}\right)_s := \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Умножая на $1/h$, получаем

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}f_s\right) = \frac{1}{h^2}f_{ss} + \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\right)_s f_s. \tag{23}$$

Теперь нужно отдельно вычислить оба коэффициента:

$$\frac{1}{h^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\right)_s.$$

Вычисление $1/h$ и $1/h^2$. Из (19):

$$h = \frac{\rho(s)+\xi}{\rho(s)}.$$

Значит,

$$\frac{1}{h} = \frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}.$$

Тогда

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2. \tag{24}$$

Вычисление $\left(\frac{1}{h}\right)_s$. Обозначим для краткости

$$\rho_s(s) := \frac{d\rho}{ds}.$$

Тогда

$$\frac{1}{h} = \frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}.$$

Поскольку при дифференцировании по s величина ξ считается постоянной, применяем правило дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{1}{h}\right)_s = \frac{\rho_s(\rho+\xi) - \rho\cdot\rho_s}{(\rho+\xi)^2}.$$

В числителе выносим ρ_s:

$$\left(\frac{1}{h}\right)_s = \frac{\rho_s\big((\rho+\xi)-\rho\big)}{(\rho+\xi)^2} = \frac{\xi\,\rho_s}{(\rho+\xi)^2}.$$

(Здесь и далее для краткости запись ρ означает $\rho(s)$.)

Теперь умножаем на $1/h = \rho/(\rho+\xi)$:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\right)_s = \frac{\rho}{\rho+\xi}\cdot\frac{\xi\,\rho_s}{(\rho+\xi)^2} = \frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3}.$$

Следовательно, из (23) получаем

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{h}f_s\right) = \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 f_{ss} + \frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3}\,f_s. \tag{25}$$

A1.3.4. Итоговая формула Лапласиана

Теперь складываем (22) и (25) в формуле (21):

$$\Delta f = \left(f_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho+\xi}f_\xi\right) + \left[\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 f_{ss} + \frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3}f_s\right].$$

Итак, окончательно:

$$\boxed{\Delta f = f_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\,f_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 f_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3}\,f_s} \tag{26}$$

Это искомый явный вид оператора Лапласа в естественных координатах (ξ, s).

Замечание о знаке последнего члена. Знак у члена с f_s зависит от соглашения об ориентации нормали и знаке координаты ξ. В данной записи использована та же конвенция, что и в A1.2:

$$h_s = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}.$$

При замене $\xi \mapsto -\xi$ соответствующий член меняет знак. Главное — везде в работе придерживаться одной и той же системы обозначений.

A1.3.5. Проверка на простом случае: окружность

Для окружности радиус кривизны постоянен:

$$\rho(s) \equiv R = \text{const}, \qquad \rho_s(s) = 0.$$

Тогда формула (26) упрощается:

$$\Delta f = f_{\xi\xi} + \frac{1}{R+\xi}f_\xi + \left(\frac{R}{R+\xi}\right)^2 f_{ss}. \tag{27}$$

Член с f_s исчезает, что согласуется с тем, что кривизна окружности постоянна и не меняется вдоль контура.

Это полезная проверка правильности формулы и важный тестовый случай для численной части.

A1.3.6. Почему этот пункт критически важен дальше

Формула (26) напрямую подставляется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0.$$

Именно из неё в следующем пункте (A1.4) появляются:

- точное уравнение Гельмгольца в координатах (ξ, s);
- после замены $E = ue^{ik\xi}$ — уравнение для огибающей $u(\xi, s)$;
- затем — параболическая модель (после отбрасывания $u_{\xi\xi}$).

Что должно быть понятно после A1.3. После этого пункта должно быть полностью понятно:

1. какая общая формула Лапласиана используется в ортогональных координатах;
2. как она специализируется для (ξ, s) при $h_\xi = 1$, $h_s = 1 + \xi/\rho(s)$;
3. откуда берутся коэффициенты
$$\frac{1}{\rho+\xi}, \qquad \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2, \qquad \frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3};$$
4. почему для окружности (при $\rho_s = 0$) формула упрощается.

A1.4. Уравнение Гельмгольца в естественных координатах (ξ, s)

В этом пункте выполняется прямой переход от стандартного уравнения Гельмгольца в декартовых координатах к его явному виду в естественных координатах (ξ, s), связанных с гладким контуром.

Зачем нужен этот пункт. В A1.3 уже получен явный вид оператора Лапласа в координатах (ξ, s). Теперь его нужно подставить в уравнение Гельмгольца, чтобы получить:

- точную (непараболизированную) постановку вблизи контура;
- базу для следующего шага — выделения быстро осциллирующей фазы $E(\xi, s) = u(\xi, s)e^{ik\xi}$;
- основу для последующего вывода параболического уравнения.

A1.4.1. Исходное уравнение Гельмгольца

Рассматривается стационарное уравнение Гельмгольца для комплексного поля E:

$$\Delta E + k^2 E = 0, \tag{28}$$

где:

- $E = E(x, y)$ — комплексная амплитуда поля;
- $k > 0$ — волновое число (высокочастотный режим соответствует $k \gg 1$);
- Δ — оператор Лапласа.

После перехода к естественным координатам (ξ, s) поле рассматривается как функция

$$E = E(\xi, s).$$

A1.4.2. Напоминание: формула Лапласиана из A1.3

В A1.3 было получено, что для любой гладкой функции $f = f(\xi, s)$

$$\Delta f = f_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, f_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 f_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3}\, f_s. \tag{29}$$

Здесь:

$$\rho_s(s) := \frac{d\rho}{ds},$$

а $\rho(s)$ — радиус кривизны контура.

Важно. Формула (29) записана в той же системе обозначений, что и пункты A1.1–A1.3, то есть при соглашении

$$h_s(\xi, s) = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}.$$

Это обеспечивает полную согласованность всех последующих формул.

A1.4.3. Подстановка в уравнение Гельмгольца

Теперь в формуле (29) нужно положить

$$f(\xi, s) = E(\xi, s).$$

Тогда:

$$\Delta E = E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, E_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 E_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3}\, E_s.$$

Подставляя это в (28), получаем

$$E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, E_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 E_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3}\, E_s + k^2 E = 0.$$

Итак, уравнение Гельмгольца в естественных координатах имеет вид:

$$\boxed{E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi}\, E_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 E_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3}\, E_s + k^2 E = 0.} \tag{30}$$

A1.4.4. Что означает каждый член в уравнении

Полезно сразу пояснить смысл членов в (30).

1) Нормальная часть. Слагаемые

$$E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho+\xi} E_\xi$$

описывают изменение поля по нормальному направлению к контуру. Член $\dfrac{1}{\rho+\xi} E_\xi$ возникает из геометрии криволинейных координат (из производной коэффициента Ламе h_s по ξ).

2) Тангенциальная часть. Слагаемое

$$\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 E_{ss}$$

отвечает за изменение поля вдоль контура. Коэффициент $\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2$ появляется из-за того, что масштаб длины вдоль s зависит от расстояния ξ до контура.

3) Геометрическая поправка при переменной кривизне. Слагаемое

$$\frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3} E_s$$

появляется только когда кривизна меняется вдоль контура, то есть когда $\rho_s(s) \neq 0$. Если кривизна постоянна, этот член исчезает.

4) Волновой член. Слагаемое

$$k^2 E$$

— стандартный член уравнения Гельмгольца, который не связан с геометрией координатного перехода.

A1.4.5. Проверка на частном случае: окружность

Для окружности радиус кривизны постоянен:

$$\rho(s) \equiv R = \text{const}, \qquad \rho_s(s) = 0.$$

Тогда уравнение (30) упрощается:

$$E_{\xi\xi} + \frac{1}{R+\xi}\,E_\xi + \left(\frac{R}{R+\xi}\right)^2 E_{ss} + k^2 E = 0. \tag{31}$$

Это важный тестовый случай:

- формула становится существенно проще;
- исчезает член с E_s;
- именно этот случай удобно использовать для верификации численной схемы.

A1.4.6. Операторная запись (удобно для дальнейших пунктов)

Для краткости можно ввести оператор точной (до параболизации) модели:

$$\mathcal{L}_\Gamma[E] := E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho+\xi}\,E_\xi + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 E_{ss} + \frac{\xi\,\rho\,\rho_s}{(\rho+\xi)^3} E_s + k^2 E. \tag{32}$$

Тогда уравнение (30) записывается компактно:

$$\mathcal{L}_\Gamma[E] = 0. \tag{33}$$

Такая запись удобна дальше:

- при переходе к уравнению для огибающей u;
- при определении невязки полной модели;
- при сравнении точной и параболической постановок.

A1.4.7. Почему этот пункт важен для следующего шага

Следующий шаг (A1.5) — выделение быстро осциллирующей фазы:

$$E(\xi, s) = u(\xi, s)e^{ik\xi}.$$

После этой замены:

- член $k^2 E$ сократится с частью производной $E_{\xi\xi}$;
- получится уравнение для огибающей $u(\xi, s)$;
- в этом уравнении будет явно выделен член $u_{\xi\xi}$, который затем отбрасывается при параболизации.

Именно поэтому (30) нужно выписать полностью и без сокращений: это "точная" исходная точка для вывода параболической модели.

Что должно быть понятно после A1.4. После этого пункта должно быть полностью понятно:

1. как подставляется Лапласиан из A1.3 в уравнение Гельмгольца;
2. откуда берётся точная формула (30);
3. какой физико-геометрический смысл у каждого члена;
4. почему случай окружности является важной проверкой;
5. почему именно с этого уравнения начинается вывод уравнения для огибающей.

A1.5. Выделение быстро осциллирующей фазы и вывод уравнения для огибающей $u(\xi, s)$

В этом пункте из точного уравнения Гельмгольца в естественных координатах выделяется быстро осциллирующая фаза $e^{ik\xi}$, после чего получается уравнение для медленно меняющейся огибающей $u(\xi, s)$.

Зачем нужен этот пункт. Именно здесь появляется структура, характерная для параболического приближения:

- главный "маршевый" член $2ik\, u_\xi$;
- малый (в смысле параболизации) член $u_{\xi\xi}$;
- геометрические коэффициенты, связанные с кривизной контура.

После этого пункта уже можно строго формулировать, что именно отбрасывается при переходе к параболической модели.

A1.5.1. Исходное точное уравнение (из A1.4)

Из пункта A1.4 имеем точное уравнение Гельмгольца в координатах (ξ, s):

$$E_{\xi\xi} + \frac{1}{\rho(s)+\xi} E_\xi + \left(\frac{\rho(s)}{\rho(s)+\xi}\right)^2 E_{ss} + \frac{\xi\,\rho(s)\,\rho_s(s)}{(\rho(s)+\xi)^3} E_s + k^2 E = 0. \tag{34}$$

Для краткости далее будем использовать обозначения

$$\rho = \rho(s), \qquad \rho_s = \frac{d\rho}{ds},$$

понимая, что ρ зависит только от s.

A1.5.2. Замена $E = u\,e^{ik\xi}$ и её смысл

Вводится представление поля в виде

$$E(\xi, s) = u(\xi, s)\,e^{ik\xi}, \tag{35}$$

где:

- $e^{ik\xi}$ — быстро осциллирующая фаза (осцилляции масштаба длины волны),
- $u(\xi, s)$ — огибающая (предполагается более медленное изменение по ξ).

Почему именно такая замена. В высокочастотном режиме основной фазовый множитель естественно выделять в направлении распространения (здесь — по координате ξ). После такой замены:

- слагаемое k^2E сократится с частью $E_{\xi\xi}$;
- появится явный член $2ik\,u_\xi$, который и задаёт "маршевый" характер уравнения;
- остаточный член $u_{\xi\xi}$ можно будет интерпретировать как модельный остаток параболизации.

A1.5.3. Пошаговое вычисление производных

Нужно вычислить E_ξ, $E_{\xi\xi}$, E_s, E_{ss}.

Производная по ξ. Из (35):

$$E(\xi, s) = u(\xi, s)e^{ik\xi}.$$

Дифференцируем по ξ (правило произведения):

$$E_\xi = u_\xi e^{ik\xi} + u\frac{\partial}{\partial\xi}(e^{ik\xi}).$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(e^{ik\xi}) = ik\,e^{ik\xi},$$

получаем

$$E_\xi = (u_\xi + ik\,u)e^{ik\xi}. \tag{36}$$

Вторая производная по ξ. Теперь дифференцируем (36):

$$E_{\xi\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[(u_\xi + ik\,u)e^{ik\xi}\Big].$$

Снова применяем правило произведения:

$$E_{\xi\xi} = (u_{\xi\xi} + ik\,u_\xi)e^{ik\xi} + (u_\xi + ik\,u)(ik)e^{ik\xi}.$$

Раскрываем второе слагаемое:

$$(u_\xi + ik\,u)(ik) = ik\,u_\xi + i^2k^2u = ik\,u_\xi - k^2u.$$

Тогда

$$E_{\xi\xi} = (u_{\xi\xi} + ik\,u_\xi + ik\,u_\xi - k^2u)e^{ik\xi}.$$

Итак,

$$E_{\xi\xi} = (u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi - k^2u)e^{ik\xi}. \tag{37}$$

Производные по s. Так как фазовый множитель $e^{ik\xi}$ не зависит от s, имеем:

$$E_s = u_s e^{ik\xi}, \qquad E_{ss} = u_{ss}e^{ik\xi}.$$

То есть

$$E_s = u_s e^{ik\xi}, \tag{38}$$

$$E_{ss} = u_{ss}e^{ik\xi}. \tag{39}$$

A1.5.4. Подстановка в уравнение Гельмгольца

Подставляем (36)–(39) в (34).

Первый член: $E_{\xi\xi}$. По (37):

$$E_{\xi\xi} = (u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi - k^2u)e^{ik\xi}.$$

Второй член: $\dfrac{1}{\rho+\xi}E_\xi$. По (36):

$$\frac{1}{\rho+\xi}E_\xi = \frac{1}{\rho+\xi}(u_\xi + ik\,u)e^{ik\xi}.$$

Третий член: $\left(\dfrac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 E_{ss}$. По (39):

$$\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 E_{ss} = \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss}e^{ik\xi}.$$

Четвёртый член: $\dfrac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}E_s$. По (38):

$$\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}E_s = \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s e^{ik\xi}.$$

Пятый член: k^2E**.** По (35):

$$k^2E = k^2u\,e^{ik\xi}.$$

Собираем всё вместе. Подстановка в (34) даёт:

$$(u_{\xi\xi}+2ik\,u_\xi-k^2u)e^{ik\xi}+\frac{1}{\rho+\xi}(u_\xi+ik\,u)e^{ik\xi}+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}e^{ik\xi}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_se^{ik\xi}+k^2ue^{ik\xi}=0.$$

Все слагаемые содержат общий множитель $e^{ik\xi}$, поэтому его можно вынести:

$$e^{ik\xi}\left[u_{\xi\xi}+2ik\,u_\xi-k^2u+\frac{1}{\rho+\xi}(u_\xi+ik\,u)+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s+k^2u\right]=0.$$

Так как $e^{ik\xi}\neq 0$, получаем эквивалентное уравнение:

$$u_{\xi\xi}+2ik\,u_\xi-k^2u+\frac{1}{\rho+\xi}(u_\xi+ik\,u)+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s+k^2u=0. \tag{40}$$

A1.5.5. Сокращение k^2-членов и окончательный вид уравнения для u

В (40) есть два слагаемых:

$$-k^2u \quad \text{и} \quad +k^2u,$$

которые взаимно уничтожаются.

Кроме того, раскроем скобку

$$\frac{1}{\rho+\xi}(u_\xi+ik\,u)=\frac{1}{\rho+\xi}u_\xi+\frac{ik}{\rho+\xi}u.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\boxed{u_{\xi\xi}+2ik\,u_\xi+\frac{1}{\rho+\xi}u_\xi+\frac{ik}{\rho+\xi}u+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s=0.} \tag{41}$$

Это *полная* (до параболизации) модель для огибающей $u(\xi,s)$ в естественных координатах.

A1.5.6. Группировка по "главной части" и "остатку"

Полезно сразу переписать (41) так, чтобы отдельно был виден член $u_{\xi\xi}$:

$$u_{\xi\xi}+\left[2ik\,u_\xi+\frac{1}{\rho+\xi}u_\xi+\frac{ik}{\rho+\xi}u+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s\right]=0. \tag{42}$$

Или эквивалентно:

$$2ik\,u_\xi+\frac{1}{\rho+\xi}u_\xi+\frac{ik}{\rho+\xi}u+\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2u_{ss}+\frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s=-\,u_{\xi\xi}. \tag{43}$$

Почему это важно. Именно в форме (43) видно:

- левая часть — "параболическая" (маршевая) структура;
- правая часть — член $-u_{\xi\xi}$, который затем отбрасывается при параболизации.

A1.5.7. Операторная запись (удобно для A1.6)

Введём оператор полной модели для огибающей:

$$\mathcal{L}_{\text{full}}[u] := u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi}u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi}u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s. \tag{44}$$

Тогда уравнение (41) записывается компактно:

$$\mathcal{L}_{\text{full}}[u] = 0. \tag{45}$$

В следующем пункте (A1.6) будет введён оператор параболической модели

$$\mathcal{L}_{\text{PE}}[u],$$

получаемый из $\mathcal{L}_{\text{full}}[u]$ удалением члена $u_{\xi\xi}$.

A1.5.8. Проверка на окружности

Для окружности

$$\rho(s) \equiv R = \text{const}, \qquad \rho_s = 0.$$

Тогда (41) упрощается:

$$u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi + \frac{1}{R+\xi}u_\xi + \frac{ik}{R+\xi}u + \left(\frac{R}{R+\xi}\right)^2 u_{ss} = 0. \tag{46}$$

Член с u_s исчезает, что согласуется с постоянной кривизной окружности.

Это важный эталонный случай для проверки:

- аналитических преобразований;
- численной реализации;
- сравнения полной и параболической моделей.

A1.5.9. Что должно быть понятно после A1.5

После этого пункта должно быть полностью понятно:

1. зачем вводится замена $E = ue^{ik\xi}$;
2. как по шагам вычисляются E_ξ, $E_{\xi\xi}$, E_s, E_{ss};
3. как выполняется подстановка в точное уравнение Гельмгольца;
4. почему сокращаются члены $-k^2u$ и $+k^2u$;
5. почему уравнение (41) является полной моделью для огибающей;
6. как в нём явно выделяется член $u_{\xi\xi}$, который затем образует модельный остаток параболизации.

A1.6. Параболизация: параболическая модель, модельный остаток и контроль применимости

В этом пункте из полной модели для огибающей $u(\xi, s)$ (полученной в A1.5) выводится параболическая модель. Также явно вводится *модельный остаток* (то есть то, что отбрасывается при параболизации) и предлагаются практические критерии контроля применимости параболического приближения.

Зачем нужен этот пункт. Именно здесь фиксируется ключевой переход:

$$\text{полная модель} \implies \text{параболическая модель.}$$

Чтобы этот переход был научно корректным, нужно:

- явно указать, какой член отбрасывается;
- ввести остаток параболизации;
- показать, как его измерять на численном решении (через невязку и нормы).

A1.6.1. Полная модель для огибающей (напоминание из A1.5)

Из пункта A1.5 получено уравнение для огибающей $u(\xi, s)$:

$$u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi} u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi} u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3} u_s = 0, \tag{47}$$

где для краткости используются обозначения

$$\rho = \rho(s), \qquad \rho_s = \frac{d\rho}{ds}.$$

Для дальнейшего удобно выделить "главную" (маршевую) часть и второй производный член:

$$u_{\xi\xi} + \mathcal{P}[u] = 0, \tag{48}$$

где введён оператор

$$\mathcal{P}[u] := 2ik\, u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi} u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi} u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3} u_s. \tag{49}$$

Тогда (48) эквивалентно записывается как

$$\mathcal{P}[u] = -u_{\xi\xi}. \tag{50}$$

Смысл записи (50). В форме (50) сразу видно:

- левая часть $\mathcal{P}[u]$ имеет "параболический" (маршевый) характер;
- правая часть $-u_{\xi\xi}$ — это именно тот вклад, который затем отбрасывается.

A1.6.2. Что означает параболизация

Параболическое приближение основано на предположении, что огибающая $u(\xi, s)$ меняется по координате ξ медленно по сравнению с быстрым фазовым множителем $e^{ik\xi}$. В терминах уравнения это означает, что вклад $u_{\xi\xi}$ мал по сравнению с основным маршевым членом $2ik\, u_\xi$ и остальными членами $\mathcal{P}[u]$.

Формально это записывают как условие вида

$$|u_{\xi\xi}| \ll |2ik\, u_\xi| \qquad \text{(локально или в подходящей норме).} \tag{51}$$

Важно. Условие (51) не является тождеством — это *аппроксимационное предположение*, которое должно проверяться (или хотя бы контролироваться) на конкретных задачах. Именно поэтому в этом пункте далее вводится модельный остаток.

A1.6.3. Параболическая модель (после отбрасывания $u_{\xi\xi}$)

При параболизации из (47) отбрасывается член $u_{\xi\xi}$. Тогда получаем параболическую модель:

$$\boxed{2ik\,u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi}u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi}u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s = 0.} \tag{52}$$

Или, в обозначениях (49),

$$\mathcal{P}[u] = 0. \tag{53}$$

Почему это уравнение называется параболическим. В (52) производная по ξ входит как производная "первого порядка" (через u_ξ), поэтому при задании начального профиля

$$u(0,s) = u_0(s)$$

уравнение можно решать как *маршевую задачу* по ξ:

$$\xi = 0 \;\to\; \xi = \Delta\xi \;\to\; \xi = 2\Delta\xi \;\to\; \cdots$$

Именно это делает параболическую модель вычислительно удобной.

A1.6.4. Эквивалентная форма для шага по ξ (удобно для численного метода)

В уравнении (52) можно собрать члены с u_ξ:

$$\left(2ik + \frac{1}{\rho+\xi}\right)u_\xi + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s + \frac{ik}{\rho+\xi}u = 0.$$

Отсюда

$$u_\xi = -\frac{\left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s + \frac{ik}{\rho+\xi}u}{2ik + \frac{1}{\rho+\xi}}. \tag{54}$$

Зачем нужна форма (54). Эта запись полезна для численной части (пункт B), потому что:

- она явно показывает "эволюцию" по ξ;
- видно, какие пространственные производные по s нужно аппроксимировать;
- удобно обсуждать схемы CN / split-step / спектральные методы.

A1.6.5. Модельный остаток параболизации

Теперь нужно *строго* зафиксировать, что именно считается модельной ошибкой (ошибкой параболического приближения).

Определение (дифференциальный модельный остаток). Для любой достаточно гладкой функции $u(\xi, s)$ вводится модельный остаток

$$R_{\text{model}}[u] := u_{\xi\xi}. \tag{55}$$

Почему именно так: из полной модели (48)

$$u_{\xi\xi} + \mathcal{P}[u] = 0$$

и параболической модели (53)

$$\mathcal{P}[u] = 0$$

видно, что параболизация состоит ровно в удалении члена $u_{\xi\xi}$. Значит, *отбрасываемый вклад* и есть $R_{\text{model}}[u] = u_{\xi\xi}$.

Важно (знак). Если записывать полную модель в виде (50), то справа стоит $-u_{\xi\xi}$. Поэтому в литературе иногда встречается определение остатка со знаком минус. В этой работе фиксируем соглашение (55):

$$R_{\text{model}}[u] = u_{\xi\xi}.$$

Главное — использовать одно и то же соглашение во всей работе.

A1.6.6. Невязка полной модели на решении параболической задачи

Пусть u_{PE} — решение параболической модели:

$$\mathcal{P}[u_{\text{PE}}] = 0.$$

Тогда невязка полной модели на этом решении равна

$$\mathcal{L}_{\text{full}}[u_{\text{PE}}] = u_{\xi\xi}^{(\text{PE})} + \mathcal{P}[u_{\text{PE}}] = u_{\xi\xi}^{(\text{PE})}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{full}}[u_{\text{PE}}] = R_{\text{model}}[u_{\text{PE}}].} \tag{56}$$

Почему это очень важно practically. Формула (56) даёт прямой диагностический инструмент:

- решаем параболическую задачу (быстро),
- подставляем полученное u_{PE} в *полный* оператор,
- величина невязки и есть оценка того, насколько сильна ошибка параболизации.

Именно это удобно использовать в вычислительном протоколе верификации.

A1.6.7. Нормы и практические критерии контроля применимости

Чтобы не ограничиваться точечным сравнением, удобно вводить относительные показатели в нормах.

(i) Абсолютный контроль модельного остатка. Например, в L_2-норме:

$$\|R_{\text{model}}[u]\|_{L_2} = \|u_{\xi\xi}\|_{L_2}. \tag{57}$$

И в равномерной норме:

$$\|R_{\text{model}}[u]\|_{L_\infty} = \|u_{\xi\xi}\|_{L_\infty}. \tag{58}$$

(ii) Относительный критерий (по отношению к главному маршевому члену). Естественный безразмерный показатель:

$$\eta_{\mathrm{model}}^{(1)} := \frac{\|u_{\xi\xi}\|}{\|2ik\, u_{\xi}\|}, \tag{59}$$

где норма (например, L_2 или L_∞) выбирается заранее и фиксируется в протоколе тестирования.

Если

$$\eta_{\mathrm{model}}^{(1)} \ll 1,$$

то параболизация в данной области параметров является обоснованной.

(iii) Относительный критерий через полную "параболическую" часть. Более строгий вариант:

$$\eta_{\mathrm{model}}^{(2)} := \frac{\|u_{\xi\xi}\|}{\|\mathcal{P}[u]\| + \varepsilon}, \tag{60}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый технический параметр для избежания деления на нуль (если используется вычислительное решение и возможна почти точная компенсация).

Замечание. Для точного решения полной модели выполняется

$$\mathcal{P}[u] = -u_{\xi\xi},$$

поэтому критерий (60) особенно полезен не для точного решения, а для численных сравнений (например, PE-решение vs full-решение / эталон).

A1.6.8. Нормы в криволинейных координатах (важно для корректной верификации)

Так как работа ведётся в координатах (ξ, s), элемент площади равен (см. A1.2)

$$dA = h_s(\xi, s)\, d\xi\, ds = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds.$$

Поэтому корректная L_2-норма функции $v(\xi, s)$ в физической области задаётся как

$$\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} |v(\xi, s)|^2 \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds. \tag{61}$$

Почему это важно. Если использовать невзвешенную норму $\int |v|^2 d\xi ds$, можно получить систематически смещённую оценку ошибки, потому что геометрический масштаб вдоль s меняется с ξ.

Для предварительных численных экспериментов допустимо сравнивать и невзвешенные нормы, но в диссертации лучше явно зафиксировать (61) как основную норму.

A1.6.9. Частный случай: окружность

Для окружности

$$\rho(s) \equiv R = \mathrm{const}, \qquad \rho_s = 0.$$

Тогда полная модель (47) и параболическая модель (52) упрощаются.

Полная модель (окружность).

$$u_{\xi\xi} + 2ik\, u_\xi + \frac{1}{R+\xi} u_\xi + \frac{ik}{R+\xi} u + \left(\frac{R}{R+\xi}\right)^2 u_{ss} = 0. \tag{62}$$

Параболическая модель (окружность).

$$\boxed{2ik\, u_\xi + \frac{1}{R+\xi} u_\xi + \frac{ik}{R+\xi} u + \left(\frac{R}{R+\xi}\right)^2 u_{ss} = 0.} \tag{63}$$

Модельный остаток (окружность). В этом случае он остаётся тем же:

$$R_{\text{model}}[u] = u_{\xi\xi},$$

но диагностировать его проще, потому что отсутствует член с u_s (геометрия постоянной кривизны).

Именно поэтому окружность — идеальный первый эталон для проверки:

- корректности вывода,
- качества численной схемы,
- границ применимости параболического приближения.

A1.6.10. Итог и связь с дальнейшими пунктами

В этом пункте выполнено следующее:

1. из полной модели (47) выделен оператор $\mathcal{P}[u]$;
2. получена параболическая модель (52) (отбрасыванием $u_{\xi\xi}$);
3. введён модельный остаток $R_{\text{model}}[u] = u_{\xi\xi}$;
4. показано, что невязка полной модели на PE-решении совпадает с модельным остатком;
5. введены нормы и практические относительные критерии применимости.

Что должно быть понятно после A1.6. После этого пункта должно быть полностью понятно:

1. что такое параболизация и какой член при этом отбрасывается;
2. почему модельный остаток — это именно $u_{\xi\xi}$;
3. как проверить применимость параболического приближения на численном решении;
4. почему для корректной L_2-оценки нужно учитывать Якобиан;
5. почему окружность — основной первый тест для верификации.

A2. Разложение общей ошибки и метрики качества решения

В этом разделе вводится систематическое разложение общей ошибки численного решения и фиксируются метрики качества, которые далее используются для верификации метода и сравнения различных численных схем.

Зачем нужен этот раздел. При сравнении численного результата с эталоном важно разделять разные источники ошибки:

- **модельная ошибка** (ошибка параболизации),
- **дискретизационная ошибка** (сетка, шаг, схема),
- **ошибка округления** (конечная точность арифметики).

Без такого разделения невозможно корректно:

- выбирать шаги и сетки,
- объяснять графики сходимости,
- понимать, где метод действительно точен, а где упирается в пределы модели.

A2.1. Какие решения сравниваются

Чтобы разложение ошибки было однозначным, вводятся три уровня решения.

1) Эталонное решение (reference / benchmark). Обозначим через

$$E_{\mathrm{ref}}(\xi, s)$$

эталонное (максимально точное) решение исходной задачи Гельмгольца. Это может быть:

- аналитическое решение (если оно известно),
- высокоточный численный расчёт,
- заранее вычисленная и сохранённая "золотая" таблица.

2) Точное решение параболической модели. Обозначим через

$$E_{\mathrm{PE}}(\xi, s)$$

решение параболической модели (в непрерывной постановке, без дискретизации).

Если работа ведётся через огибающую, то

$$E_{\mathrm{PE}}(\xi, s) = u_{\mathrm{PE}}(\xi, s) e^{ik\xi}.$$

3) Численное решение параболической модели. Обозначим через

$$E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}}(\xi, s)$$

численное решение параболической модели:

- h обозначает совокупность параметров дискретизации (шаги, сетка),
- fl (floating-point) указывает, что расчёт выполнен в конечной точности.

Для более точного разделения ошибок также полезно ввести промежуточный объект:

$$E_{\mathrm{PE}}^{h}(\xi, s),$$

то есть *точное решение дискретной схемы* (как если бы арифметика была точной, без округления).

A2.2. Разложение общей ошибки

Общая ошибка численного решения PE относительно эталона:

$$e_{\mathrm{tot}} := E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}} - E_{\mathrm{ref}}. \tag{64}$$

Добавим и вычтем E_{PE} и E_{PE}^{h}:

$$E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}} - E_{\mathrm{ref}} = \big(E_{\mathrm{PE}} - E_{\mathrm{ref}}\big) + \big(E_{\mathrm{PE}}^{h} - E_{\mathrm{PE}}\big) + \big(E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}} - E_{\mathrm{PE}}^{h}\big).$$

Отсюда получаем разложение

$$\boxed{e_{\mathrm{tot}} = e_{\mathrm{model}} + e_{\mathrm{disc}} + e_{\mathrm{round}},} \tag{65}$$

где

$$e_{\mathrm{model}} := E_{\mathrm{PE}} - E_{\mathrm{ref}}, \tag{66}$$

$$e_{\mathrm{disc}} := E_{\mathrm{PE}}^{h} - E_{\mathrm{PE}}, \tag{67}$$

$$e_{\mathrm{round}} := E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}} - E_{\mathrm{PE}}^{h}. \tag{68}$$

Смысл каждого слагаемого.

- e_{model} — ошибка самой модели (PE vs точная задача Гельмгольца), даже если PE решать идеально.
- e_{disc} — ошибка численной схемы (сетка, шаг, порядок аппроксимации).
- e_{round} — ошибка конечной точности вычислений (double, long double, и т.д.).

A2.3. Оценка общей ошибки через неравенство треугольника

Для любой нормы $\|\cdot\|$ из (65) следует:

$$\|e_{\mathrm{tot}}\| \le \|e_{\mathrm{model}}\| + \|e_{\mathrm{disc}}\| + \|e_{\mathrm{round}}\|. \tag{69}$$

Почему это полезно. Формула (69) показывает, что уменьшение шага само по себе не гарантирует улучшение результата, если:

- уже доминирует модельная ошибка (параболизация),
- или уже доминирует ошибка округления.

Именно поэтому на графиках "ошибка vs шаг" часто наблюдается:

- участок убывания (доминирует e_{disc}),
- затем плато (доминирует e_{model} или e_{round}),
- иногда рост ошибки на слишком мелких шагах (накопление округления).

A2.4. Основные нормы: L_2 и L_∞

Так как расчёт проводится в криволинейных координатах (ξ, s), нужно учитывать Якобиан (см. A1.2):

$$dA = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds.$$

Взвешенная L_2-норма. Для функции $v(\xi, s)$ в физической области Ω:

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \iint_\Omega |v(\xi, s)|^2 \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds. \tag{70}$$

Соответственно,

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} = \left(\iint_\Omega |v|^2 \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right) d\xi\, ds\right)^{1/2}. \tag{71}$$

Равномерная норма (L_∞).

$$\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{(\xi,s)\in\Omega} |v(\xi, s)|. \tag{72}$$

Почему нужны обе нормы.

- L_2 отражает "среднюю" ошибку по области.
- L_∞ контролирует худший случай (максимальное отклонение).

В задачах волнового поля обе нормы важны:

- L_2 — для интегральной точности,
- L_∞ — для локальных пиков и фазовых сдвигов.

A2.5. Относительные ошибки

Абсолютная ошибка полезна, но для сравнения разных задач и разных амплитуд обычно используют относительные ошибки.

Относительная ошибка в L_2. Для численного решения E_{num} и эталона E_{ref}:

$$\varepsilon_{L_2} := \frac{\|E_{\text{num}} - E_{\text{ref}}\|_{L_2(\Omega)}}{\|E_{\text{ref}}\|_{L_2(\Omega)}}. \tag{73}$$

Относительная ошибка в L_∞.

$$\varepsilon_{L_\infty} := \frac{\|E_{\mathrm{num}} - E_{\mathrm{ref}}\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|E_{\mathrm{ref}}\|_{L_\infty(\Omega)}}. \tag{74}$$

Замечание. Если сравнение проводится для огибающих $u(\xi, s)$, то аналогичные формулы пишутся с заменой $E \mapsto u$.

A2.6. Фазовая ошибка

Для комплексных волновых полей одной амплитудной ошибки недостаточно: важно также контролировать фазу.

Локальная фазовая разность. Пусть сравниваются два комплексных поля E_1 и E_2. Удобно определить фазовую разность как

$$\Delta\phi(\xi, s) := \mathrm{Arg}\big(E_1(\xi, s)\,\overline{E_2(\xi, s)}\big), \tag{75}$$

где Arg — главный аргумент комплексного числа (например, в диапазоне $(-\pi, \pi]$).

Почему формула (75) **удобна.** Если писать фазу отдельно как $\phi = \arg E$, то при вычитании фаз возникает проблема "перепрыгивания" через $\pm\pi$. Формула (75) автоматически даёт корректную "завёрнутую" разность фаз.

Нормы фазовой ошибки. Можно использовать:

$$\varepsilon_{\phi,\infty} := \|\Delta\phi\|_{L_\infty(\Omega_*)}, \tag{76}$$

$$\varepsilon_{\phi,2} := \|\Delta\phi\|_{L_2(\Omega_*)}. \tag{77}$$

Здесь $\Omega_* \subseteq \Omega$ — область, где амплитуда не слишком мала (см. следующее замечание).

Важно: маска по амплитуде. Если $|E|$ близко к нулю, фаза становится численно неустойчивой. Поэтому фазовую ошибку нужно считать только там, где

$$|E_{\mathrm{ref}}(\xi, s)| \geq \delta_{\mathrm{amp}}, \tag{78}$$

где $\delta_{\mathrm{amp}} > 0$ — фиксированный порог (например, малая доля от максимальной амплитуды).

A2.7. Невязка уравнения как отдельная метрика качества

Кроме прямого сравнения с эталоном, полезно измерять *невязку уравнения*: насколько вычисленное поле удовлетворяет исходному PDE.

(i) Невязка полной модели для огибающей. Из A1.5 оператор полной модели:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{full}}[u] = u_{\xi\xi} + 2ik\,u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi}u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi}u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3}u_s.$$

Тогда невязка полной модели:

$$R_{\mathrm{full}}[u_{\mathrm{num}}] := \mathcal{L}_{\mathrm{full}}[u_{\mathrm{num}}]. \tag{79}$$

(ii) Невязка параболической модели. Из A1.6 оператор параболической модели:

$$\mathcal{P}[u] = 2ik\, u_\xi + \frac{1}{\rho+\xi} u_\xi + \frac{ik}{\rho+\xi} u + \left(\frac{\rho}{\rho+\xi}\right)^2 u_{ss} + \frac{\xi\rho\rho_s}{(\rho+\xi)^3} u_s.$$

Соответственно:

$$R_{\mathrm{PE}}[u_{\mathrm{num}}] := \mathcal{P}[u_{\mathrm{num}}]. \tag{80}$$

Интерпретация невязок.

- Если u_{num} — численное решение PE-схемы, то R_{PE} измеряет качество *дискретизации* PE (должен уменьшаться при сгущении сетки).
- Невязка R_{full} на PE-решении отражает смесь:
  - модельного остатка (параболизации),
  - дискретизационной ошибки,
  - округления.

Связь с модельным остатком. Если u_{PE} — точное решение параболической модели, то (см. A1.6)

$$R_{\mathrm{full}}[u_{\mathrm{PE}}] = u_{\xi\xi} = R_{\mathrm{model}}[u_{\mathrm{PE}}].$$

Это очень важная связь для диагностики применимости PE.

A2.8. Практически измеряемые прокси для трёх ошибок

Разложение (65) теоретически точное, но все три компоненты обычно нельзя измерить напрямую в одном запуске. Поэтому далее используются *практические прокси.*

1) Модельная ошибка (proxy). Если есть эталон E_{ref} (например, окружность), то

$$\|e_{\mathrm{model}}\| \approx \|E_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}} - E_{\mathrm{ref}}\| \quad \text{при достаточно малых шагах,} \tag{81}$$

то есть на режиме, где дискретизационная ошибка уже мала.

Также можно использовать невязку полной модели на PE-решении:

$$\|R_{\mathrm{full}}[u_{\mathrm{PE}}^{h,\mathrm{fl}}]\|.$$

2) Дискретизационная ошибка (proxy). Оценивается по сходимости при сгущении сетки:

$$\|e_{\mathrm{disc}}\| \approx \|E_h - E_{h/2}\|, \tag{82}$$

или более точно — через оценку Ричардсона (если известен порядок схемы). Эта часть будет подробно использоваться в разделе B (численные методы).

3) Ошибка округления (proxy). Оценивается сравнением арифметик:

$$\|e_{\mathrm{round}}\| \approx \|E^{\mathrm{double}} - E^{\mathrm{long\ double}}\| \quad \text{или} \quad \|E^{\mathrm{double}} - E^{\mathrm{mp}}\|. \tag{83}$$

Также полезны:

- compensated/Kahan summation (для эталонных рядов),
- перестановка порядка суммирования,
- повтор вычислений при разных батч-разбиениях.

A2.9. Рекомендуемый протокол верификации для каждого теста

Для каждого тестового случая (окружность, почти окружность, переменная кривизна) полезно фиксировать единый протокол.

Минимальный набор метрик. Для каждого запуска сохранять:

1. ε_{L_2} по формуле (73);
2. ε_{L_∞} по формуле (74);
3. фазовую ошибку $\varepsilon_{\phi,\infty}$ (и/или $\varepsilon_{\phi,2}$);
4. норму невязки R_{PE};
5. норму невязки R_{full};
6. параметры сетки (например, N_s, N_ξ, шаги, схема, тип арифметики).

Почему это важно. Одинаковый протокол делает результаты:

- воспроизводимыми,
- сравнимыми между разными схемами,
- пригодными для построения графиков сходимости и выбора оптимальных параметров.

A2.10. Что должно быть понятно после A2

После этого раздела должно быть полностью понятно:

1. как строго разлагается общая ошибка на модельную, дискретизационную и округлительную;
2. почему уменьшение шага не всегда уменьшает общую ошибку;
3. какие нормы использовать (L_2, L_∞, фазовая ошибка, невязка);
4. почему в L_2-норме нужно учитывать Якобиан;
5. какие practically измеряемые прокси использовать для каждой компоненты ошибки;
6. какой набор метрик нужно сохранять в вычислительных экспериментах.