Вывод формул Френе–Серре для плоского гладкого контура

1. Обозначения и предположения

Рассматривается гладкая регулярная плоская кривая (контур)

$$\boldsymbol{a}:\ I \to \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{a}(t) = (x(t), y(t)),$$

где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал параметра t.

Регулярность означает

$$\boldsymbol{a}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{для всех } t \in I.$$

Для вывода формул требуется гладкость как минимум класса C^2.

Скалярное произведение обозначается точкой, норма:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \qquad \|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}.$$

2. Длина дуги и натуральная параметризация

Длина дуги от фиксированной точки t_0 до t определяется формулой

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{a}'(u)\|\, du.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt} = \|\boldsymbol{a}'(t)\|, \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}'(t)\|}.$$

После перепараметризации кривая записывается как $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(s)$, где s — длина дуги. Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \boldsymbol{a}'(t)\,\frac{1}{\|\boldsymbol{a}'(t)\|}, \qquad \left\|\frac{d\boldsymbol{a}}{ds}\right\| = 1.$$

3. Формулы Френе–Серре

Здесь $\vec{a}(s)$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OS}$ точки S, $\vec{n}(s)$ — вектор нормали к контуру. Также на рисунке $\vec{\tau}(s)$ — касательный вектор к контуру. Запишем формулы Френе–Серре:

$$\begin{cases} \vec{\tau}(s) = \dfrac{d\vec{a}(s)}{ds}, \\ \dfrac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = -\dfrac{\vec{n}(s)}{\rho(s)}, \\ \dfrac{d\vec{n}(s)}{ds} = \dfrac{\vec{\tau}(s)}{\rho(s)}. \end{cases} \tag{1.4.9}$$

$\rho(s)$ — радиус кривизны контура.

4. Детальный вывод формул (1.4.9)

4.1. Первая формула

В натуральной параметризации s вектор

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{ds}$$

имеет единичную длину. Поэтому единичный касательный вектор определяется как

$$\boldsymbol{\tau}(s) := \frac{d\boldsymbol{a}}{ds}.$$

Это и даёт первую формулу из (1.4.9).

4.2. Ортогональность $\boldsymbol{\tau}'$ и $\boldsymbol{\tau}$

Так как $\|\boldsymbol{\tau}(s)\| = 1$, выполняется

$$\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) = 1.$$

Дифференцируя по s, получаем

$$2\,\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}'(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}'(s) = 0,$$

то есть $\boldsymbol{\tau}'(s) \perp \boldsymbol{\tau}(s)$.

4.3. Вторая формула

В плоскости любой вектор, перпендикулярный $\boldsymbol{\tau}(s)$, коллинеарен единичной нормали $\boldsymbol{n}(s)$. Следовательно, существует скаляр $c(s)$ такой, что

$$\boldsymbol{\tau}'(s) = c(s)\,\boldsymbol{n}(s).$$

По определению кривизны $\kappa(s) = \|\boldsymbol{\tau}'(s)\|$, а радиус кривизны $\rho(s) = 1/\kappa(s)$. При выборе ориентации нормали, согласованной с (1.4.9), берётся

$$c(s) = -\frac{1}{\rho(s)}.$$

Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{n}(s)}{\rho(s)}.$$

4.4. Третья формула

Так как $\|\boldsymbol{n}(s)\| = 1$, то

$$\boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n}(s) \cdot \boldsymbol{n}'(s) = 0.$$

Значит $\boldsymbol{n}'(s)$ï$\boldsymbol{n}(s)$, то есть $\boldsymbol{n}'(s)$ коллинеарен $\boldsymbol{\tau}(s)$:

$$\boldsymbol{n}'(s) = b(s)\,\boldsymbol{\tau}(s).$$

Дифференцируем тождество $\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) = 0$:

$$\boldsymbol{\tau}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) + \boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{n}'(s) = 0.$$

Подставляя $\boldsymbol{\tau}'(s) = -\dfrac{\boldsymbol{n}(s)}{\rho(s)}$ и $\boldsymbol{n}'(s) = b(s)\boldsymbol{\tau}(s)$, получаем

$$-\frac{1}{\rho(s)} + b(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b(s) = \frac{1}{\rho(s)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\tau}(s)}{\rho(s)}.$$

5. Следствие: коэффициенты Ламе в координатах (s, ξ)

Рассматривается отображение

$$\boldsymbol{r}(s, \xi) = \boldsymbol{a}(s) + \xi\,\boldsymbol{n}(s),$$

где s — параметр вдоль контура, ξ — координата по нормали.
Тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} = \frac{d\boldsymbol{a}}{ds} + \xi\,\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{\tau}(s) + \xi\,\frac{\boldsymbol{\tau}(s)}{\rho(s)} = \left(1 + \frac{\xi}{\rho(s)}\right)\boldsymbol{\tau}(s), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} = \boldsymbol{n}(s).$$

Отсюда коэффициенты Ламе:

$$h_s(s, \xi) = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}\right\| = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)}, \qquad h_\xi(s, \xi) = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi}\right\| = 1.$$

6. Литература

Список литературы

[1] M. P. do Carmo. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.

[2] D. J. Struik. Lectures on Classical Differential Geometry. Addison-Wesley, 2nd ed., 1988.