

# Верификация численной схемы и вычислительный алгоритм

Разделы С и D

## Содержание

|          |                                                                               |          |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>С. Верификация численной схемы на тесте окружности</b>                     | <b>2</b> |
| 1.1      | C1. Цель верификационного эксперимента . . . . .                              | 2        |
| 1.2      | C2. Модельная задача на окружности . . . . .                                  | 2        |
| 1.3      | C3. Точное спектральное решение . . . . .                                     | 3        |
| 1.4      | C4. Сетка и дискретизация по угловой переменной . . . . .                     | 3        |
| 1.5      | C5. Схема Кранка–Николсона . . . . .                                          | 3        |
| 1.6      | C6. Норма ошибки . . . . .                                                    | 3        |
| 1.7      | C7. Параметры численного эксперимента . . . . .                               | 4        |
| 1.8      | C8. Численные результаты при фиксированном $N_t = 4000$ . . . . .             | 4        |
| 1.9      | C9. Оценка порядка сходимости . . . . .                                       | 4        |
| 1.10     | C10. Анализ графика ошибки по $N$ . . . . .                                   | 5        |
| 1.11     | C11. Зависимость ошибки от числа временных шагов . . . . .                    | 5        |
| 1.12     | C12. Ошибка как функция вычислительного времени . . . . .                     | 6        |
| 1.13     | C13. Интерпретация результата . . . . .                                       | 6        |
| 1.14     | C14. Вывод по разделу С . . . . .                                             | 6        |
| <b>2</b> | <b>D. Численный алгоритм, линейная алгебра и вычислительная эффективность</b> | <b>8</b> |
| 2.1      | D1. Цель раздела . . . . .                                                    | 8        |
| 2.2      | D2. Дискретный оператор второй производной . . . . .                          | 8        |
| 2.3      | D3. Операторная форма схемы Кранка–Николсона . . . . .                        | 9        |
| 2.4      | D4. Спектральная устойчивость схемы . . . . .                                 | 9        |
| 2.5      | D5. Дисперсионная ошибка . . . . .                                            | 9        |
| 2.6      | D6. Циклическая трёхдиагональная система . . . . .                            | 9        |
| 2.7      | D7. Сведение к трёхдиагональной системе . . . . .                             | 9        |
| 2.8      | D8. Метод Томаса . . . . .                                                    | 10       |
| 2.9      | D9. Вычислительная сложность полного алгоритма . . . . .                      | 10       |
| 2.10     | D10. Анализ времени выполнения . . . . .                                      | 10       |
| 2.11     | D11. Практический вывод об эффективности . . . . .                            | 10       |
| 2.12     | D12. Требования к дальнейшей реализации . . . . .                             | 10       |
| 2.13     | D13. Минимальный протокол регрессионного тестирования . . . . .               | 11       |
| 2.14     | D14. Вывод по разделу D . . . . .                                             | 11       |

# 1. С. Верификация численной схемы на тесте окружности

## 1.1. С1. Цель верификационного эксперимента

В данном разделе проводится верификация численной схемы Кранка–Николсона для модельной задачи, возникающей в случае окружности, то есть при постоянной кривизне контура. Такой тест является базовым, поскольку геометрические коэффициенты становятся независимыми от продольной координаты, а соответствующая эволюционная задача допускает точное спектральное решение.

Основная цель верификации состоит в проверке следующих свойств:

1. корректности дискретизации оператора по угловой переменной;
2. порядка сходимости численной схемы;
3. зависимости ошибки от числа угловых узлов  $N$ ;
4. зависимости ошибки от числа шагов  $N_t$ ;
5. вычислительной сложности алгоритма;
6. наличия или отсутствия режима насыщения ошибки.

Тестовая задача выбирается таким образом, чтобы точное решение могло быть вычислено независимо от схемы Кранка–Николсона. Это необходимо для того, чтобы ошибка численного решения измерялась относительно внешнего эталона, а не относительно решения, полученного тем же численным методом.

## 1.2. С2. Модельная задача на окружности

Для окружности радиус кривизны постоянен:  $\rho(s) \equiv R$ ,  $\rho_s(s) = 0$ . В этом случае геометрический член, содержащий производную радиуса кривизны, исчезает. После перехода к угловой переменной  $\psi$  и стандартных преобразований задача сводится к уравнению шрёдингеровского типа:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2}, \quad \psi \in [0, 2\pi), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Поскольку переменная  $\psi$  является угловой, на функцию  $W$  накладываются периодические граничные условия:

$$W(0, t) = W(2\pi, t), \quad W_\psi(0, t) = W_\psi(2\pi, t).$$

В вычислительном эксперименте используется начальное условие:

$$W(\psi, 0) = W_0(\psi) = e^{3i\psi} + 0.3 e^{11i\psi}. \quad (2)$$

Такой выбор удобен по двум причинам: начальное условие является гладким и периодическим; оно содержит только две гармоники, поэтому точное решение имеет простой спектральный вид и может быть использовано как эталон.

### 1.3. С3. Точное спектральное решение

Пусть  $W(\psi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{W}_m(t) e^{im\psi}$ . Подстановка в уравнение (1) даёт:

$$\widehat{W}'_m(t) = -\frac{im^2}{2} \widehat{W}_m(t), \quad \Rightarrow \quad \widehat{W}_m(t) = \widehat{W}_m(0) \exp\left(-\frac{im^2 t}{2}\right).$$

Следовательно, точное решение:

$$W_{\text{ex}}(\psi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{W}_m(0) \exp\left(-\frac{im^2 t}{2}\right) e^{im\psi}. \quad (3)$$

Для начального условия (2) ненулевыми коэффициентами являются только  $\widehat{W}_3(0) = 1$  и  $\widehat{W}_{11}(0) = 0.3$ , откуда:

$$W_{\text{ex}}(\psi, t) = \exp\left(3i\psi - \frac{9it}{2}\right) + 0.3 \exp\left(11i\psi - \frac{121it}{2}\right). \quad (4)$$

Эта формула используется как эталон для проверки численного решения.

### 1.4. С4. Сетка и дискретизация по угловой переменной

Вводится равномерная сетка:

$$\psi_j = j \Delta\psi, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad \Delta\psi = \frac{2\pi}{N}; \quad t_n = n \Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N_t}.$$

Вторая производная аппроксимируется центральной разностью:

$$W_{\psi\psi}(\psi_j, t_n) \approx \frac{W_{j+1}^n - 2W_j^n + W_{j-1}^n}{(\Delta\psi)^2}.$$

Из-за периодичности  $W_{-1}^n = W_{N-1}^n$ ,  $W_N^n = W_0^n$ . Дискретный оператор второй производной является циклическим трёхдиагональным.

### 1.5. С5. Схема Кранка–Николсона

Для уравнения (1) схема Кранка–Николсона:

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta t} = \frac{i}{4} [D_{\psi\psi} W_j^{n+1} + (D_{\psi\psi} W_j^n)].$$

Вводим параметр  $\alpha = i\Delta t / (4(\Delta\psi)^2)$ . После группировки:

$$-\alpha W_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha) W_j^{n+1} - \alpha W_{j+1}^{n+1} = \alpha W_{j-1}^n + (1 - 2\alpha) W_j^n + \alpha W_{j+1}^n. \quad (5)$$

В матричной форме  $AW^{n+1} = BW^n$ , где  $A$  и  $B$  — циклические трёхдиагональные матрицы с главной диагональю  $1 \pm 2\alpha$  и боковыми  $\mp\alpha$  (включая угловые элементы).

### 1.6. С6. Норма ошибки

Относительная дискретная  $L_2$ -ошибка:

$$\varepsilon_{L_2} = \frac{(\sum_{j=0}^{N-1} |W_j^{\text{num}} - W_j^{\text{ex}}|^2)^{1/2}}{(\sum_{j=0}^{N-1} |W_j^{\text{ex}}|^2)^{1/2}}. \quad (6)$$

## 1.7. С7. Параметры численного эксперимента

$$a = 1, \quad k = 40, \quad T = t_0 = \frac{1}{ka} = 0.025.$$

$$N \in \{128, 256, 512, 1024\}, \quad N_t \in \{250, 500, 1000, 2000, 4000\}.$$

## 1.8. С8. Численные результаты при фиксированном $N_t = 4000$

Таблица 1: Относительная  $L_2$ -ошибка при  $N_t = 4000$

| $N$  | $\varepsilon_{L_2}$     | runtime, s |
|------|-------------------------|------------|
| 128  | $1.0459 \times 10^{-2}$ | 0.315484   |
| 256  | $2.6340 \times 10^{-3}$ | 0.580787   |
| 512  | $6.6000 \times 10^{-4}$ | 1.158539   |
| 1024 | $1.6500 \times 10^{-4}$ | 2.303975   |

При увеличении  $N$  вдвое ошибка уменьшается приблизительно в четыре раза:

$$\frac{\varepsilon_{128}}{\varepsilon_{256}} \approx 3.97, \quad \frac{\varepsilon_{256}}{\varepsilon_{512}} \approx 3.99, \quad \frac{\varepsilon_{512}}{\varepsilon_{1024}} \approx 4.00.$$

Наблюдаемая ошибка:  $\varepsilon_{L_2}(N) \sim CN^{-2}$ .

## 1.9. С9. Оценка порядка сходимости

Порядок сходимости  $p_N = \log(\varepsilon_N / \varepsilon_{2N}) / \log 2$ :

Таблица 2: Наблюдаемый порядок сходимости

| Переход                | Формула                                                 | $p_N$ |
|------------------------|---------------------------------------------------------|-------|
| 128 $\rightarrow$ 256  | $\log(\varepsilon_{128} / \varepsilon_{256}) / \log 2$  | 1.989 |
| 256 $\rightarrow$ 512  | $\log(\varepsilon_{256} / \varepsilon_{512}) / \log 2$  | 1.997 |
| 512 $\rightarrow$ 1024 | $\log(\varepsilon_{512} / \varepsilon_{1024}) / \log 2$ | 1.999 |

Экспериментальный порядок сходимости  $p \approx 2$ , что согласуется с центральной разностной аппроксимацией и схемой Кранка–Николсона второго порядка.

### 1.10. C10. Анализ графика ошибки по $N$

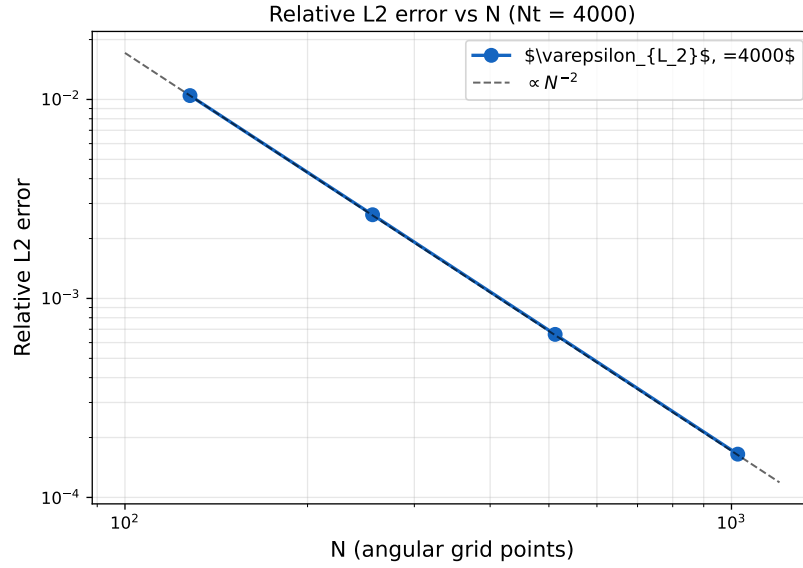


Рис. 1: Относительная  $L_2$ -ошибка в зависимости от числа угловых узлов  $N$  при  $N_t = 4000$ .

На рис. 1 в координатах  $\log \epsilon_{L_2}$  против  $\log N$  наблюдается линейное убывание с наклоном  $-2$ :  $\epsilon_{L_2}(N) = O(N^{-2})$ . Это подтверждает корректность реализации дискретного оператора и показывает, что на данном диапазоне параметров ошибка определяется пространственной дискретизацией, а не временным шагом или ошибками округления.

### 1.11. C11. Зависимость ошибки от числа временных шагов

Таблица 3: Относительная  $L_2$ -ошибка для разных  $N$  и  $N_t$

| $N_t$ | $N = 128$               | $N = 256$               | $N = 512$               | $N = 1024$              |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 250   | $1.0460 \times 10^{-2}$ | $2.6350 \times 10^{-3}$ | $6.6100 \times 10^{-4}$ | $1.6600 \times 10^{-4}$ |
| 500   | $1.0459 \times 10^{-2}$ | $2.6340 \times 10^{-3}$ | $6.6000 \times 10^{-4}$ | $1.6500 \times 10^{-4}$ |
| 1000  | $1.0459 \times 10^{-2}$ | $2.6340 \times 10^{-3}$ | $6.6000 \times 10^{-4}$ | $1.6500 \times 10^{-4}$ |
| 2000  | $1.0459 \times 10^{-2}$ | $2.6340 \times 10^{-3}$ | $6.6000 \times 10^{-4}$ | $1.6500 \times 10^{-4}$ |
| 4000  | $1.0459 \times 10^{-2}$ | $2.6340 \times 10^{-3}$ | $6.6000 \times 10^{-4}$ | $1.6500 \times 10^{-4}$ |

При фиксированном  $N$  ошибка почти не зависит от  $N_t$ . Следовательно, доминирует пространственная ошибка:  $\epsilon_{L_2} \approx C(\Delta\psi)^2$ ,  $\epsilon_t \ll \epsilon_\psi$ . Дальнейшее увеличение  $N_t$  нецелесообразно до тех пор, пока не увеличивается  $N$ .

## 1.12. C12. Ошибка как функция вычислительного времени

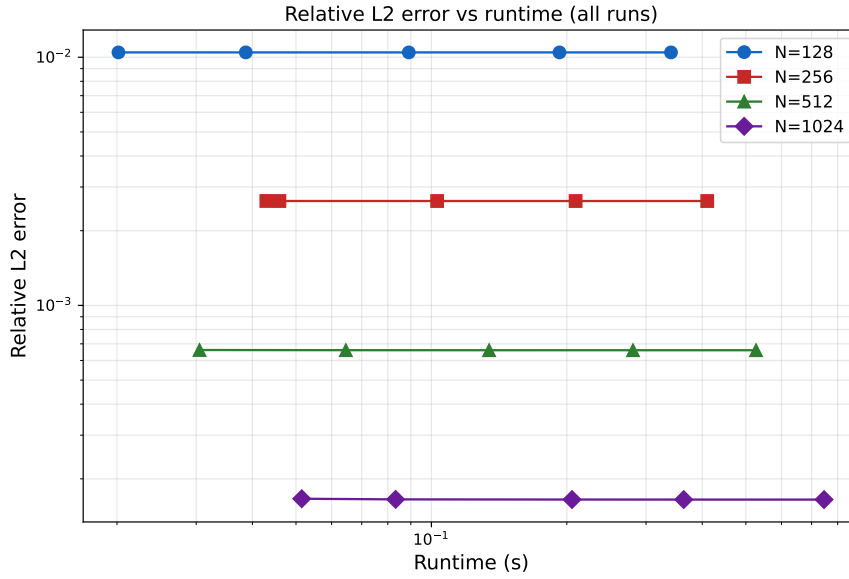


Рис. 2: Относительная  $L_2$ -ошибка в зависимости от времени выполнения для всех запусков.

Каждый горизонтальный уровень ошибки соответствует фиксированному  $N$ . Увеличение  $N_t$  при фиксированном  $N$  увеличивает время вычисления, но почти не уменьшает ошибку. Оптимизация: сначала  $N_t$  выбирается достаточно большим для подавления временной ошибки, затем  $N$  увеличивается для уменьшения доминирующей пространственной ошибки.

## 1.13. C13. Интерпретация результата

Реализованная схема находится в режиме пространственной сходимости:  $\varepsilon_{L_2} = O(N^{-2})$ . Режим машинного насыщения на текущем диапазоне  $N$  ещё не достигнут. Для его поиска необходимо продолжить расчёты при  $N = 2048, 4096, 8192, \dots$  и контролировать  $\varepsilon_{L_2}$ ,  $\varepsilon_{L_\infty}$ ,  $\|R^{\text{PE}}\|$ ,  $\|R^{\text{full}}\|$ .

## 1.14. C14. Вывод по разделу С

Верификационный эксперимент на окружности показывает:

1. схема Кранка–Николсона корректно воспроизводит точное спектральное решение;
2. наблюдаемый порядок сходимости  $p \approx 2$ ;
3. ошибка определяется преимущественно пространственной дискретизацией;
4. увеличение  $N_t$  при фиксированном  $N$  почти не влияет на точность;
5. вычислительное время растёт почти линейно с  $N_t$ ;
6. для исследования машинной точности требуется расширение диапазона  $N$ .

**Листинг: полная реализация на Python.**

Listing 1: Parameters, initial and exact conditions

```

1 import numpy as np, time
2 from scipy.linalg import solve_banded
3
4 # Parameters
5 A_RADIUS = 1.0; K_WAVE = 40.0
6 KA = K_WAVE * A_RADIUS # = 40
7 T_FINAL = 1.0 / KA # = 0.025
8
9 def initial_condition(psi):
10     """W0(psi) = exp(3i*psi) + 0.3*exp(11i*psi)."""
11     return np.exp(3j*psi) + 0.3*np.exp(11j*psi)
12
13 def exact_solution(psi, t):
14     """Exact solution (two spectral terms)."""
15     return ( np.exp(3j*psi) * np.exp(-9j*t/2)
16             + 0.3*np.exp(11j*psi) * np.exp(-121j*t/2))

```

Listing 2: One step of Crank-Nicolson

```

1 def cn_step(W, dps_i, dt):
2     """CN step: dW/dt=(i/2)*d2W/dpsi2, periodic BC, Sherman-Morrison.
3         """
4     N = len(W)
5     alpha = 1j * dt / (4.0 * dps_i**2) # scheme parameter
6
7     # right-hand side r = B*W^n
8     rhs = (alpha*np.roll(W,1)
9           + (1 - 2*alpha)*W
10          + alpha*np.roll(W,-1))
11
12     b = 1 + 2*alpha; off = -alpha
13     gamma = -b # Sherman-Morrison parameter
14
15     # tridiagonal matrix T (no corner elements)
16     ab = np.zeros((3, N), dtype=complex)
17     ab[0, 1:] = off # superdiag
18     ab[1, :] = b # main diag
19     ab[2, :-1] = off # subdiag
20
21     # Modification: T_mod = T + rank-1 correction
22     ab_mod = ab.copy()
23     ab_mod[1, 0] -= gamma
24     ab_mod[1, N-1] -= off**2 / gamma
25
26     u = np.zeros(N, dtype=complex)
27     u[0] = gamma; u[N-1] = off
28
29     # Two tridiagonal solves
30     y = solve_banded((1, 1), ab_mod, rhs)
31     z = solve_banded((1, 1), ab_mod, u)

```

```

32 # Sherman-Morrison correction
33 vTy = y[0] + (off/gamma)*y[N-1]
34 vTz = z[0] + (off/gamma)*z[N-1]
35 return y - z * vTy / (1 + vTz)

```

Listing 3: Solver and error computation

```

1 def solve(N, Nt, T=T_FINAL):
2     psi = np.linspace(0, 2*np.pi, N, endpoint=False)
3     dpsi = psi[1] - psi[0]; dt = T / Nt
4     W = initial_condition(psi).astype(complex)
5     t0 = time.time()
6     for _ in range(Nt):
7         W = cn_step(W, dpsi, dt)
8     return W, psi, time.time() - t0
9
10 def relative_L2_error(W_num, W_ref):
11     return (np.linalg.norm(W_num - W_ref)
12             / np.linalg.norm(W_ref))
13
14 # Run table C8
15 for N in [128, 256, 512, 1024]:
16     W_num, psi, rt = solve(N, 4000)
17     eps = relative_L2_error(W_num, exact_solution(psi, T_FINAL))
18     print(f"N={N:5d} eps={eps:.4e} t={rt:.4f}s")

```

## 2. D. Численный алгоритм, линейная алгебра и вычислительная эффективность

### 2.1. D1. Цель раздела

В данном разделе анализируется вычислительный алгоритм, реализующий схему Кранка–Николсона для периодической задачи по угловой переменной. Основное внимание уделяется структуре линейной системы, циклическому трёхдиагональному решателю, вычислительной сложности и практическим ограничениям реализации.

### 2.2. D2. Дискретный оператор второй производной

Дискретный оператор  $D_2$ :  $(D_2 W)_j = (W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1})/(\Delta\psi)^2$ . С учётом периодичности матрица  $D_2$  — циклическая трёхдиагональная:

$$D_2 = \frac{1}{(\Delta\psi)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

### 2.3. D3. Операторная форма схемы Кранка–Николсона

Обозначим  $L = \frac{i}{2}D_2$ . Схема КН для  $\dot{W} = LW$ :

$$\underbrace{\left(I - \frac{\Delta t}{2}L\right)}_A W^{n+1} = \underbrace{\left(I + \frac{\Delta t}{2}L\right)}_B W^n.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  сохраняют циклическую трёхдиагональную структуру.

### 2.4. D4. Спектральная устойчивость схемы

Собственные значения дискретного оператора:

$$\lambda_m = -\frac{4}{(\Delta\psi)^2} \sin^2 \frac{m\Delta\psi}{2}, \quad \mu_m = \frac{i}{2} \lambda_m \in i\mathbb{R}.$$

Множитель усиления:

$$G_m = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \mu_m}{1 - \frac{\Delta t}{2} \mu_m}, \quad |G_m| = 1.$$

Схема *нейтрально устойчива*:  $\|W^{n+1}\|_2 = \|W^n\|_2$ .

### 2.5. D5. Дисперсионная ошибка

При малых  $\Delta t$ :  $G_m = \exp(\Delta t \mu_m + O(\Delta t^3))$ . Временная ошибка схемы  $O(\Delta t^2)$ . Пространственная аппроксимация  $O((\Delta\psi)^2)$ . Полная ошибка дискретизации:

$$e_{\text{disc}} = O((\Delta\psi)^2 + \Delta t^2).$$

### 2.6. D6. Циклическая трёхдиагональная система

На каждом шаге решается  $AW^{n+1} = r^n$  с матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha & 0 & 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Угловые элементы  $-\alpha$  делают систему *циклической* и не позволяют применить метод Томаса напрямую.

### 2.7. D7. Сведение к трёхдиагональной системе

Циклическая матрица:  $A = T + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ . По формуле Шермана–Моррисона решение  $Ax = r$  сводится к:

$$Ty = r, \quad Tz = \mathbf{u}, \quad x = y - \frac{\mathbf{v}^T y}{1 + \mathbf{v}^T z} z.$$

Сложность: два решения трёхдиагональных систем методом Томаса  $= O(N)$ .

## 2.8. D8. Метод Томаса

Прямая–обратная прогонка для  $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$ :

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}};$$

$$x_N = d'_N, \quad x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}.$$

Сложность:  $O(N)$ . Коэффициенты матрицы  $A$  не меняются по времени при фиксированных  $N$  и  $\Delta t$ , поэтому факторизация выполняется *один раз* до начала временного цикла.

## 2.9. D9. Вычислительная сложность полного алгоритма

Один шаг: построение правой части  $O(N)$  + решение системы  $O(N) = O(N)$ . Полный расчёт ( $N_t$  шагов):  $\text{Cost} = O(N N_t)$ .

## 2.10. D10. Анализ времени выполнения

Таблица 4: Время выполнения при  $N_t = 4000$

| $N$  | runtime, s | Отношение к предыдущему |
|------|------------|-------------------------|
| 128  | 0.315484   | —                       |
| 256  | 0.580787   | 1.84                    |
| 512  | 1.158539   | 1.99                    |
| 1024 | 2.303975   | 1.99                    |

Начиная с  $N = 256$ :  $T(2N) \approx 2T(N)$ , то есть  $T(N) \sim O(N)$ .

## 2.11. D11. Практический вывод об эффективности

Поскольку  $\varepsilon_{L_2} \sim N^{-2}$  и  $T_{\text{cpu}} \sim N$ :

$$\varepsilon_{L_2} \sim T_{\text{cpu}}^{-2} \quad \text{при фиксированном } N_t.$$

Это вычислительно благоприятный режим: удвоение времени счёта даёт четырёхкратное улучшение точности.

При дальнейшем росте  $N$  ожидается переход к режиму насыщения:  $\varepsilon_{L_2} \approx \varepsilon_{\text{round}}$  или  $\varepsilon_{L_2} \approx \varepsilon_{\text{model}}$ .

## 2.12. D12. Требования к дальнейшей реализации

1. Вынести решатель циклической системы в отдельный модуль.
2. Реализовать независимые тесты для метода Томаса и циклического решателя.
3. Добавить контроль нормы решения на каждом шаге.
4. Добавить вычисление невязки:  $R^n = (W^{n+1} - W^n)/\Delta t - (i/4) D_2(W^{n+1} + W^n)$ .

5. Добавить автоматическую оценку порядка сходимости.
6. Расширить диапазон  $N$  и  $N_t$ .
7. Сравнить вычисления в типах `double`, `long double` и произвольной точности.

## 2.13. D13. Минимальный протокол регрессионного тестирования

**Тест 1: сохранение нормы.**

$$\left| \frac{\|W^n\|_2 - \|W^0\|_2}{\|W^0\|_2} \right| < \tau_{\text{mass}}.$$

**Тест 2: сравнение с точным решением.**  $\varepsilon_{L_2} < \tau_{\text{exact}}$  для  $W_0 = e^{3i\psi} + 0.3 e^{11i\psi}$ .

**Тест 3: порядок сходимости.** При  $N \rightarrow 2N$ :  $\varepsilon_N/\varepsilon_{2N} \approx 4$ ,  $p_N \approx 2$ .

**Тест 4: линейное масштабирование.** При фиксированном  $N_t$ :  $T(2N)/T(N) \approx 2$ .

## 2.14. D14. Вывод по разделу D

Реализованный алгоритм обладает следующими свойствами:

1. нейтральная устойчивость для спектральных мод;
2. дискретизационная ошибка  $O((\Delta\psi)^2 + \Delta t^2)$ ;
3. пространственная ошибка доминирует в проведённом эксперименте;
4. сложность одного шага  $O(N)$ , полного расчёта  $O(N N_t)$ ;
5. экспериментальное время подтверждает линейное масштабирование.

Реализованный алгоритм является корректным и эффективным базовым ядром для дальнейшего развития численного инструмента на более сложные геометрии.