

Расчёт излучения с искривлённого контура на плоскости с помощью решения параболического уравнения Малюжинца

Оглавление.

1. Вводная часть.

1. Описание задачи в общем виде.
2. Аналитическое решение для случая контура в виде окружности.
3. Способ численного решения точного уравнения.
4. Решение параболического уравнения Малюжинца.
5. Метод Кранка-Николсона численного решения параболического уравнения.

2. Расчёты на примере конкретных случаев.

1. Излучение с контура в виде дуги окружности.
2. Излучение с контура в виде окружности.
3. Излучение с контура в виде параболы.

3. Заключение.

4. Литература.

Глава 1.

Вводная часть.

1. Описание задачи в общем виде.

Антенна в виде тонкого замкнутого контура излучает на плоскости. Задано распределение поля на этом контуре. Требуется найти распределение поля на плоскости снаружи контура. Оно должно удовлетворять краевому условию на границе антенны и уравнению Гельмгольца:

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad (1.1.1)$$

Так как это задача об излучении на плоскости, то используем двумерные условия излучения Зоммерфельда:

$$u(r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u(r)}{\partial r} - iku(r) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.1.2)$$

Для решения этой задачи далее будут использоваться три метода:

- 1) аналитическое решение в простом случае (контур в виде окружности);
- 2) численное решение точного уравнения на плоскости методом Гаусса-Зейделя;
- 3) решение параболического уравнения Малюжинца.

1. Аналитическое решение для случая контура в виде окружности.

$$\square E + k^2 E = 0; E(r = a, \varphi) = E_0(\varphi) \quad (1.2.1)$$

Запишем уравнение Гельмгольца в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\text{Разложим поле в ряд Фурье: } E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(r) e^{in\varphi} \quad (1.2.3)$$

Подставив ряд в уравнение, можно получить дифференциальные уравнения для каждого члена ряда:

$$A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) A_n = 0; \quad A_n(r) = C_n H_n^{(1)}(kr) \quad (1.2.4)$$

Константы находятся из граничных условий. Если задача достаточно проста, то их нахождение не составляет труда. $H_n^{(1)}(kr)$ – функции Ганкеля первого рода. Упрощённая асимптотика:

$$H_n^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{\frac{i}{4}(4kr - 2\pi n - \pi)}, \quad |kr| \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg(kr) < 2\pi \quad (1.2.5)$$

Асимптотика Дебая:

$$H_n^{(1)}(kr) \sim \frac{\sqrt{2/\pi} e^{-\pi i/4}}{((kr)^2 - n^2)^{1/4}} e^{i\left(\sqrt{(kr)^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{kr}\right)}; \quad kr \gg 1, \quad n < kr \quad (1.2.6)$$

2. Способ численного решения точного уравнения.

Зададим форму контура уравнением в полярных координатах, выбрав центр внутри области, ограниченной контуром. Тогда данная задача будет математически формулироваться следующим образом:

$$\square E + k^2 E = 0; r \geq \rho(\varphi) > 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; E(\rho(\varphi), \varphi) = E_0(\varphi) \quad (1.3.1)$$

Кроме того, для излучающей антенны следует наложить условия излучения Зоммерфельда на бесконечности:

$$E = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sqrt{r} \left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) \right] = 0 \quad (1.3.2)$$

Иначе их можно сформулировать так: при стремлении расстояния до антенны к бесконечности поле приближённо может быть описано функцией вида:

$$E(r \rightarrow \infty, \varphi) = \frac{E_\infty(\varphi)}{\sqrt{r}} e^{ikr} \quad (1.3.3)$$

Вводим новую функцию u и переменную t такие, что:

$$E = \frac{u}{\sqrt{r}}; \quad t = \frac{r}{\rho(\varphi)} \quad (1.3.4)$$

Тогда:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{\sqrt{r}} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2} \frac{u}{r\sqrt{r}}; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{r\sqrt{r}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3}{4} \frac{u}{r^2\sqrt{r}} \quad (1.3.5)$$

$$\square E = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{u}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{u}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{u}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u \bullet \rho^2(\varphi) = 0; \quad u_0(\varphi) = \frac{E_0(\varphi)}{\sqrt{\rho(\varphi)}} \quad (1.3.7)$$

Обозначим $F(t, \varphi) = k^2 \rho^2(\varphi) + \frac{1}{4t^2}$. Тогда исходная задача может быть переписана в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + F(t, \varphi) u = 0; \quad u(1, \varphi) = u_0(\varphi); \quad t \geq 1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.3.8)$$

$$u = O(1), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right] = 0 \quad (1.3.9)$$

Это уравнение в частных производных второго порядка является эллиптическим уравнением с граничными условиями на прямоугольнике с двумя склеенными сторонами. Его удобно решать на прямоугольной сетке с помощью решения системы линейных уравнений, составленной из уравнений разностной схемы и граничных условий. Поскольку такая система линейных уравнений имеет очень сильно разреженную матрицу, то удобнее всего искать решение с помощью релаксационного метода Гаусса-Зейделя.

Этот метод состоит в следующем. Пусть дана система линейных уравнений:

$$A \vec{x} = \vec{b}; \quad A = \|a_{km}\|; \quad k, m = 0, 1 \dots size - 1 \quad (1.3.10)$$

Тогда формула для k -й итерации имеет вид:

$$x_p^{(k+1)} = \omega \sum_{j=0}^{p-1} c_{pj} x_j^{(k+1)} + \omega \sum_{j=p+1}^{size-1} c_{pj} x_j^{(k)} + \omega d_p + (1 - \omega) x_p^{(k)} \quad (1.3.11)$$

$$0 < \omega < 2; \quad c_{pj} = -\frac{a_{pj}}{a_{pp}}; \quad d_p = \frac{b_p}{a_{pp}}; \quad p = 0, 1 \dots size - 1 \quad (1.3.12)$$

Варьируя значение параметра релаксации ω , можно найти его значения, при которых наблюдается наибольшая скорость сходимости.

Введём сетку по $j=0, 1, \dots, J$, $n=0, 1, \dots, N$, где:

$$\varphi(j) = \frac{2\pi j}{J}; \quad t(n) = 1 + \frac{n}{N}(R - 1); \quad R = const \gg 1 \quad (1.3.13)$$

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{d\varphi^2 \bullet \left(1 + \frac{n}{N}(R-1)\right)^2} + \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} + u_j^n \bullet \left(\frac{1}{4 \bullet \left(1 + \frac{n}{N}(R-1)\right)^2} + k^2 \rho^2 \left(\frac{2\pi j}{J} \right) \right) = 0 \quad (1.3.14)$$

$$u_j^0 = u_0 \left(\frac{2\pi j}{J} \right); \quad u_j^N = u_j^{N-1} \bullet \left(1 + i \bullet dt \bullet k \bullet \rho \left(\frac{2\pi j}{J} \right) \right) \quad (1.3.15)$$

Тогда:

$$size = (J + 1) * (N + 1); \quad n = (p)div(J + 1); \quad j = (p)mod(J + 1) \quad (1.3.16)$$

$$dt = \frac{R-1}{N}; d\varphi = \frac{2\pi}{J}; p(j, n) = (J+1) * n + j \quad (1.3.17)$$

$$F(p[j, n]) = \frac{1}{4(1+\frac{n}{N}(R-1))^2} + k^2 \rho^2 \left(\frac{2\pi j}{J}\right) \quad (1.3.18)$$

$$k_1(p[j, n]) = \frac{1}{d\varphi^2 \bullet t^2(n)}; k_2(p[j, n]) = \frac{1}{dt^2}; k_0(p[j, n]) = F(p[j, n]) - 2k_1 - 2k_2 \quad (1.3.19)$$

При $n=0$:

$$u_j^0 = u_0 \left(\frac{2\pi j}{J}\right) j, n \xrightarrow{\Rightarrow} px_p = u_0 \left(\frac{2\pi p}{J}\right); a_{p,p} = 1; b_p = u_0 \left(\frac{2\pi p}{J}\right) \quad (1.3.20)$$

При $n=1, \dots, N-1$ возможны три случая:

$$1) j=1, \dots, J-1; a_{p,p} = k_0(p); a_{p,p+1} = k_1(p); a_{p,p \pm (J+1)} = k_2(p) \quad (1.3.21)$$

$$2) j=0; a_{p,p} = k_0(p); a_{p,p+1} = a_{p,p+J-1} = k_1(p); a_{p,p \pm (J+1)} = k_2(p) \quad (1.3.22)$$

$$3) j=J; a_{p,p} = k_0(p); a_{p,p+1} = a_{p,p+1-J} = k_1(p); a_{p,p \pm (J+1)} = k_2(p) \quad (1.3.23)$$

При $n=N$ записываем условие Зоммерфельда:

$$a_{p,p} = 1; a_{p,p-(J+1)} = - \left(1 + i \bullet dt \bullet k \bullet \rho \left(\frac{2\pi j}{J}\right)\right) \quad (1.3.24)$$

Все остальные элементы матрицы A и вектора b , которые не определены выше, равны нулю. Для расчётов удобно задавать матрицу A в виде четырёхмерной матрицы, а вектора b и x в виде двумерных матриц.

1. Решение параболического уравнения Малюжинца.

Рассматриваем плоский контур, заданный параметрическими уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$. Перейдём от параметрических уравнений к натуральному уравнению кривой.

$$k_t(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}; s(t) = \int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt \quad (1.4.1)$$

Функцию $t(s)$ проще всего найти с помощью интегрирования дифференциального уравнения по следующей схеме Рунге-Кутты:

$$t(s + \square s) = t(s) + \frac{\square s}{6} (f_1[t(s)] + 2f_2[t(s)] + 2f_3[t(s)] + f_4[t(s)]) \quad (1.4.2)$$

$$f_1[t(s)] = \frac{1}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{1/2}} \quad (1.4.3)$$

$$f_2[t(s)] = f_1[t(s) + \frac{\square s}{2} f_1[t(s)]] \quad (1.4.4)$$

$$f_3[t(s)] = f_1[t(s) + \frac{\square s}{2} f_2[t(s)]] \quad (1.4.5)$$

$$f_4[t(s)] = f_1[t(s) + \square s f_3[t(s)]] \quad (1.4.6)$$

В итоге получаем натуральное уравнение кривой:

$$k = k(s) = k_t(t[s]) \quad (1.4.7)$$

На рисунке 1 изображён этот плоский контур. Начало координат O расположено на нём. Произвольная рассматриваемая точка P находится на некотором удалении от контура из точки S в направлении нормали к контуру. Пусть s – координата по контуру тела, ξ – координата по нормали к контуру. Физический смысл этих координат заключается в том, что ξ нумерует разные волновые фронты, а s нумерует точки

в пределах одного волнового фронта. Это значит, что радиус-вектор $\rightarrow$ точки Р равен:

$$\vec{r}(\xi, s) = \vec{a}(s) + \xi \bullet \vec{n}(s) \quad (1.4.8)$$

Здесь $\vec{a}(s)$ – радиус-вектор $\vec{S}$ точки S, $\vec{n}(s)$ – вектор нормали к контуру. Также на рисунке $\vec{\tau}(s)$ – касательный вектор к контуру. Запишем формулы Френе-Серре:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{a}(s)}{ds}, \\ \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = -\frac{\vec{n}(s)}{\rho(s)}, \\ \frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \frac{\vec{\tau}(s)}{\rho(s)}, \end{array} \right. \quad (1.4.9)$$

$\rho(s)$ – радиус кривизны контура.

S

$\vec{\tau}$

O

P

$\vec{n}$

1. Координаты Малюжинца.

Исходя из этих соотношений, можно записать коэффициенты Ламе:

$$h_\xi = \left| \frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial \xi} \right| = 1; \quad h_s = \left| \frac{\partial \vec{r}(\xi, s)}{\partial s} \right| = 1 + \frac{\xi}{\rho(s)} = h_s(\xi, s) \quad (1.4.10)$$

Рассматриваем поле E в виде: $E = u * e^{ik\xi}$. Такое представление наиболее адекватно случаю дальней зоны, хотя им можно успешно пользоваться и в ближней зоне. Параболическое уравнение Малюжинца имеет вид:

$$ik \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h_s} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0; \quad u(0, s) = u_0(s) \quad (1.4.11)$$

Оно получено подстановкой новых переменных в уравнение Гельмгольца $\square E + k^2 E = 0$, и отбрасыванием члена, содержащего вторую производную по ξ .

Вводим новую переменную:

$$\sigma = \int_0^s h_s(\xi, s') ds' = s + \xi * \gamma(s); \quad \gamma(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho(s')} ds' \quad (1.4.12)$$

σ является эффективной длиной на контуре, отстоящем параллельно контуру тела, находящемся вдали от тела.

$\gamma(s)$ – угол, на который поворачивается касательная к контуру при обходе вдоль контура от 0 до s.

Вводим новые функции:

$$(\xi, \sigma) = \gamma(s(\xi, \sigma)); R(\xi, \sigma) = \rho(s(\xi, \sigma)); U(\xi, \sigma) = u(\xi, s) \quad (1.4.13)$$

Тогда:

$$ik \left(2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{U}{R+\xi} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} = 0; U(\xi, \sigma) = V(\xi, \sigma) e^{-ik \int_0^\sigma (\xi, \sigma') d\sigma'} \quad (1.4.14)$$

Для функции V:

$$\begin{cases} 2ik \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = 0, & 0 \leq \sigma \leq L + \xi \gamma(L), \xi \geq 0, \\ V(0, \sigma) = u_0(\sigma) e^{ik \int_0^\sigma \gamma(\sigma') d\sigma'} \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Для дальнейшего упрощения задачи (тут требуется преобразовать область координат, в которой ищем решение), сделаем следующие подстановки:

$$\tilde{\xi} = \xi + \frac{L}{\gamma(L)}; V(\xi, \sigma) = \tilde{V}(\tilde{\xi}, \sigma); \tilde{V}(\tilde{\xi}, \sigma) = \frac{e^{ik \frac{\sigma^2}{2\xi}}}{\sqrt{\frac{\gamma(L)}{L} \xi}} \tilde{W}\left(\frac{1}{k\xi}, \frac{\sigma}{\xi}\right) \quad (1.4.16)$$

$$\tilde{t} = \frac{1}{k\xi}; \psi = \frac{\sigma}{\xi}; t = t_0 - \tilde{t}; \tilde{W}(\tilde{t}, \psi) = W(t, \psi); t_0 = \frac{\gamma(L)}{kL} \quad (1.4.17)$$

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = 0, & 0 < t < \frac{\gamma(L)}{kL}, 0 < \psi < \gamma(L); \\ W(0, \psi) = u_0 \left[\frac{L\psi}{\gamma(L)} \right] e^{ik \left[\int_0^{\frac{L\psi}{\gamma(L)}} \gamma(s) ds - \frac{L}{2\gamma(L)} \psi^2 \right]}; \end{cases} \quad (1.4.18)$$

Конечный результат:

$$\begin{cases} u(\xi, s) = \frac{W(t, \psi)}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{L} \gamma(L)}} e^{ikP(\xi, s)}, \\ P(\xi, s) = \frac{[s + \xi \gamma(s)]^2}{2[\xi + \frac{L}{\gamma(L)}]} - \int_0^s \gamma(s') \left[1 + \frac{\xi}{\rho(s')} \right] ds'; \end{cases} \quad (1.4.19)$$

Формулы перехода к новым координатам:

$$t = \frac{\gamma(L)\xi}{kL[\xi + \frac{L}{\gamma(L)}]}; \psi = \gamma(L) \frac{s + \xi \gamma(s)}{L + \xi \gamma(L)} \quad (1.4.20)$$

1. Метод Кранка-Николсона численного решения параболического уравнения.

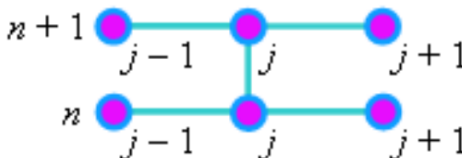
Уравнение (1.4.18) можно решить как аналитически разложением в ряд Фурье, так и численно с помощью метода Кранка-Николсона.

дифференциальных уравнений параболического

люстная схема Кранка-Николсона

тод решения разностной схемы Кранка Николсона

ый шаблон (см. рисунок),
 ющий разностную схему Кранка-
 (4.18), свидетельствует о том, что
 ит три неизвестные величины -
 нкции u на $(n + 1)$ -ом шаге по
 едовательно, для решения данной разностной схемы необходимо
 ь метод прогонки. Методики определения прогоночных
 тов и решения на правой границе, а также общий вид алгоритма
 данном случае будут такими же, как и для неявной разностной



2. Разностная схема Кранка-Никольсона.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.5.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \rightarrow \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{2 * d\psi^2} + \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1}}{2 * d\psi^2} \quad (1.5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \rightarrow \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{dt} \quad (1.5.3)$$

$$\frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{2 * d\psi^2} + \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1}}{2 * d\psi^2} = -2i \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{dt} \quad (1.5.4)$$

Преобразуем это выражение к виду, удобному для использования метода прогонки.

$$\frac{w_{j+1}^{n+1}}{d\psi^2} + 2w_j^{n+1} \left(\frac{2i}{dt} - \frac{1}{d\psi^2} \right) + \frac{w_{j-1}^{n+1}}{d\psi^2} = 4i \frac{w_j^n}{dt} - \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{d\psi^2} \quad (1.5.5)$$

Удобный вид для использования метода прогонки будет выглядеть так:

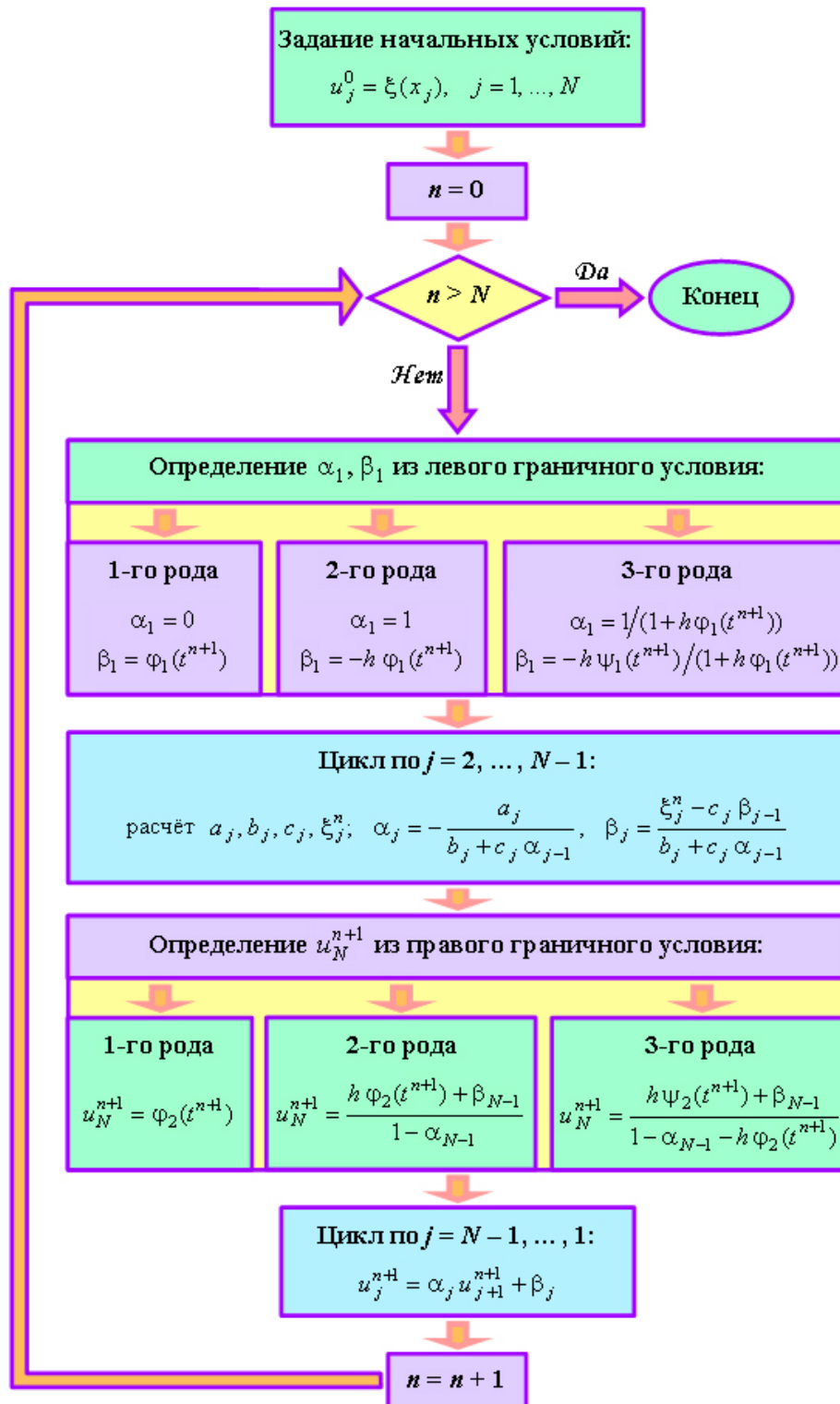
$$a_j w_{j+1}^{n+1} + b_j w_j^{n+1} + c_j w_{j-1}^{n+1} = \rho_j^n \quad (1.5.6)$$

Также запишем теперь рекуррентное прогоночное соотношение:

$$w_j^{n+1} = \alpha_j w_{j+1}^{n+1} + \beta_j; \quad w_{j+1}^{n+1} = \frac{w_j^{n+1} - \beta_j}{\alpha_j} \quad (1.5.7)$$

$$\alpha_j = \frac{-a_j}{b_j + c_j \alpha_{j-1}}; \quad \beta_j = \frac{\rho_j^n - c_j \beta_{j-1}}{b_j + c_j \alpha_{j-1}} \quad (1.5.8)$$

$$\text{Условие сходимости также соблюдается: } |a_j| + |c_j| < |b_j| \quad (1.5.9)$$



3. Блок-схема реализации алгоритма метода прогонки.

Глава 2.

Расчёты на примере конкретных случаев.

2.1. Излучение с контура в виде дуги окружности.

На дуге поле равно $E_0(\varphi)$, вне дуги равно нулю.

$$\square E + k^2 E = 0; E(r = a, \varphi) = \begin{cases} E_0(\varphi), & |\varphi| < \theta, \\ 0, & |\varphi| > \theta; \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Пусть s – координата по контуру окружности, ξ – координата по нормали к контуру тела. Возьмём тогда $s = \varphi$, $\xi = r - a$. Вводим новые координаты:

$$t = \frac{\xi \gamma(2\theta a)}{2\theta a k (\xi + a \frac{2\theta}{\gamma(2\theta a)})}; \quad \psi = \gamma(2\theta a) \frac{a\varphi + \xi \gamma(\varphi a)}{2a\theta + \xi \gamma(2\theta a)}; \quad \gamma(\varphi a) = \varphi \quad (2.1.2)$$

Упрощаем:

$$t = \frac{1}{ka} \frac{\xi}{\xi + a}; \quad \xi = \frac{kta^2}{1 - kta}; \quad \psi = 2\theta \frac{\varphi(\xi + a)}{2\theta(\xi + a)} = \varphi; \quad 0 \leq t < \frac{1}{ka}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2.1.3)$$

Рассматриваем поле E в виде: $E = u * e^{ikr}$. В новых координатах уравнение Малюжинца приобретает вид:

$$\begin{cases} u(r, \varphi) = \frac{W(t, \psi)}{\sqrt{r/a}} e^{ikP(\xi, \varphi)}, \\ P(\xi, \varphi) = \frac{[a\varphi + \xi \gamma(\varphi)]^2}{2[r+a]} - \int_0^\varphi \gamma(\varphi') [a + \xi] d\varphi' = \frac{[a\varphi + \xi \varphi]^2}{2[\xi + a]} - \frac{\varphi^2}{2} [a + \xi] = 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

В случае ступенчатой функции следует вначале разложить в ряд Фурье:

$$W(t, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t) e^{i\psi n}; \quad u_0[\psi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(0) e^{i\psi n} \quad (2.1.5)$$

$$F_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0[\psi] e^{-in\psi} d\psi = \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{-ika} \quad (2.1.6)$$

Подставив ряд в уравнение, можно получить дифференциальные уравнения для каждого члена ряда и решить их:

$$2iF_n'(t) - n^2 F_n(t) = 0; \quad F_n(t) = F_n(0) * e^{-0.5in^2 t} = \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{-ika} e^{-0.5in^2 t} \quad (2.1.7)$$

$$t = \frac{1}{ka} \frac{r-a}{r} = \frac{1}{ka} - \frac{1}{kr}; \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{-ika} e^{-0.5in^2 (\frac{1}{ka} - \frac{1}{kr})} e^{i\varphi n} \quad (2.1.8)$$

$$E(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{-ika} e^{ikr} e^{-0.5in^2 (\frac{1}{ka} - \frac{1}{kr})} e^{i\varphi n} \quad (2.1.9)$$

$$E(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{ik(r-a)(1 - \frac{0.5n^2}{k^2 ar})} e^{i\varphi n} \quad (2.1.10)$$

Теперь запишем уравнение Гельмгольца в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0 \quad (2.1.11)$$

Разложим поле в ряд Фурье:

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(r) e^{in\varphi} \quad (2.1.12)$$

Подставив ряд в уравнение, можно получить дифференциальные уравнения для каждого члена ряда:

$$A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) A_n = 0; \quad A_n(r) = C_n H_n^{(1)}(kr) \quad (2.1.13)$$

Рассмотрим частный случай:

$$E_0(\varphi) = 1, \quad \theta = \theta_0; \quad (2.1.14)$$

Раскладываем в ряд Фурье:

$$E_0(\varphi) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}; \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_0(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \quad (2.1.15)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} 1 * e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} \quad (2.1.16)$$

С другой стороны:

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \quad (2.1.17)$$

$$E_0(\varphi) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(ka) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{in\varphi} \quad (2.1.18)$$

$$C_n H_n^{(1)}(ka) = \frac{\sin(n\theta)}{\pi n}; \quad C_n = \frac{\sin(n\theta)}{\pi n H_n^{(1)}(ka)} \quad (2.1.19)$$

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_0)}{\pi n H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \quad (2.1.20)$$

Итак, имеем два решения - точное и из уравнения Малюжинца:

$$\begin{cases} E(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{ik(r-a)\left(1-\frac{0.5n^2}{k^2 a r}\right)} e^{i\varphi n} \\ E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta_0)}{\pi n H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Сравним асимптотики Дебая членов рядов точного решения с членами рядов решения параболического уравнения Малюжинца:

$$H_n^{(1)}(kr) \sim \frac{\sqrt{2/\pi}}{((kr)^2 - n^2)^{1/4}} e^{-\pi i/4} e^{i\left(\sqrt{(kr)^2 - n^2} - n \arccos \frac{n}{kr}\right)} = U * e^{in(kr)} \quad (2.1.22)$$

$$n(kr) = -\frac{\pi}{4} + kr * \left(1 - \frac{n^2}{2(kr)^2} - \frac{n^4}{8(kr)^4}\right) - n * \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{kr} - \frac{n^3}{6(kr)^3}\right) + o\left(\frac{n^4}{(kr)^3}\right) \quad (2.1.23)$$

$$n(kr) = \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2} + kr\right) + \left(\frac{n^2}{2kr}\right) + \left(\frac{n^4}{12(kr)^3}\right) + o\left(\frac{n^4}{(kr)^3}\right) \quad (2.1.24)$$

Поправка к фазе, задаваемая первым членом, совпадает с поправкой к фазе, которую даёт упрощённая асимптотика. Если взять два члена суммы, то получим поправку, которая совпадёт с поправкой к фазе, задаваемой членами ряда решения уравнения Малюжинца. При больших значениях n , сопоставимых по величине с kr , асимптотики, задаваемые решением уравнения Малюжинца и асимптотикой Дебая точного решения, будут различаться. Асимптотика Дебая справедлива при $\frac{n}{kr} < 1$, решение уравнения Малюжинца даёт адекватный результат при $n = O((kr)^{3/4})$.

Построим графики.

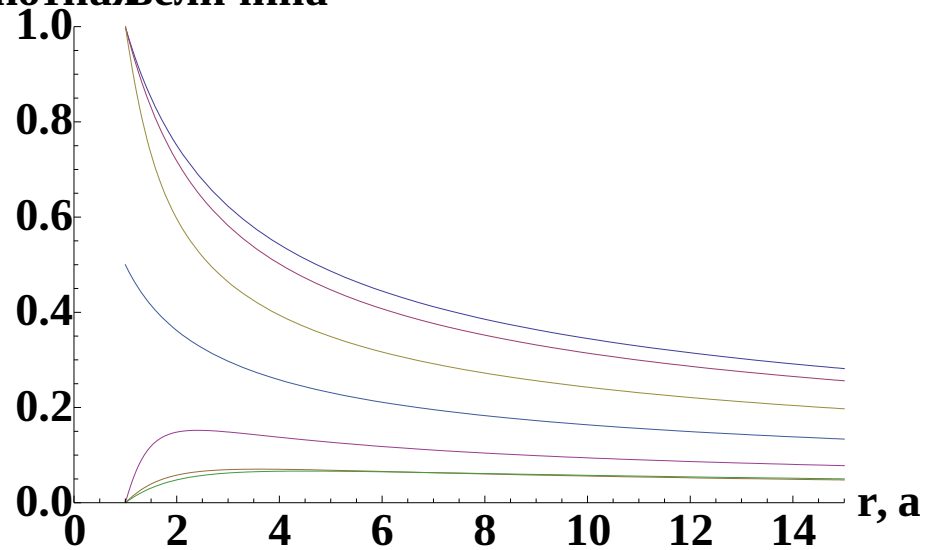
$$\square E + k^2 E = 0; E(r = a, \varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| < \pi/2, \\ 0, & |\varphi| > \pi/2; \end{cases} \quad ; ka = 1; E_0 = 1; r \quad (2.1.25)$$

$$E[r, \phi] = E_0 \left| \sum_{n=-100}^{100} \frac{\sin[n * \frac{\pi}{2}] * \text{HankelH1}[n, ka * (\frac{r}{a})]}{\pi * (n + 0.00001) * \text{HankelH1}[n, ka]} I * n * \phi + \frac{0.5 * \text{HankelH1}[0, ka * (\frac{r}{a})]}{\text{HankelH1}[0, ka]} \right| \quad (2.1.26)$$

По горизонтальной оси отложен радиус в единицах a , по вертикальной - абсолютная величина E .

Для $\phi = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm 2\pi/3, \pm 5\pi/6, \pm\pi$ графики точного решения:

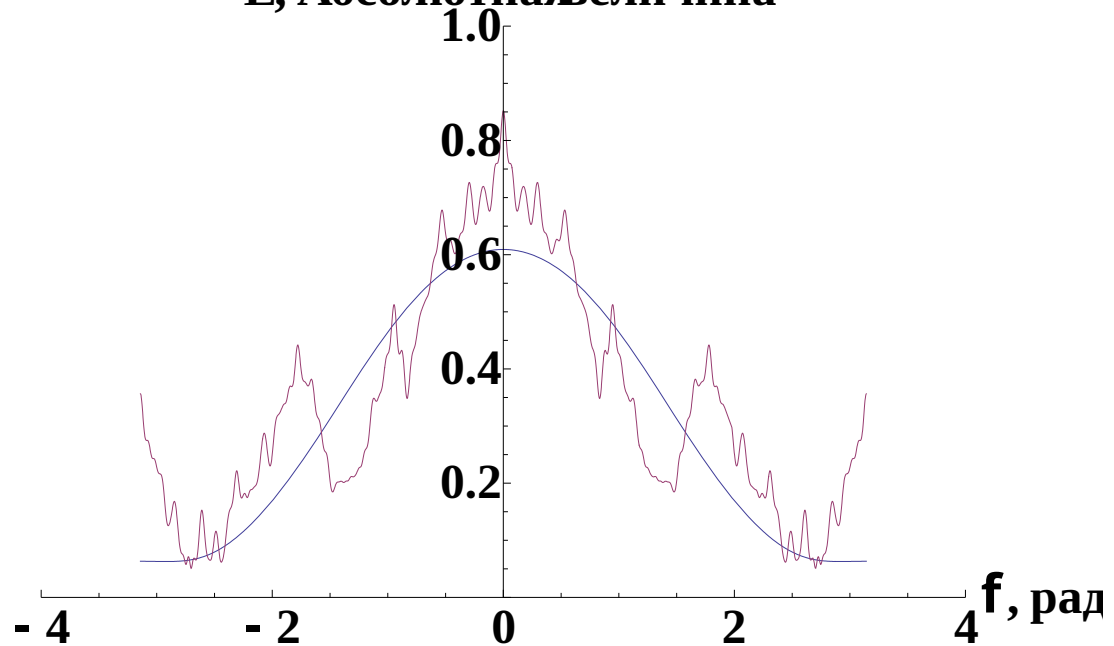
Е, Абсолютная величина



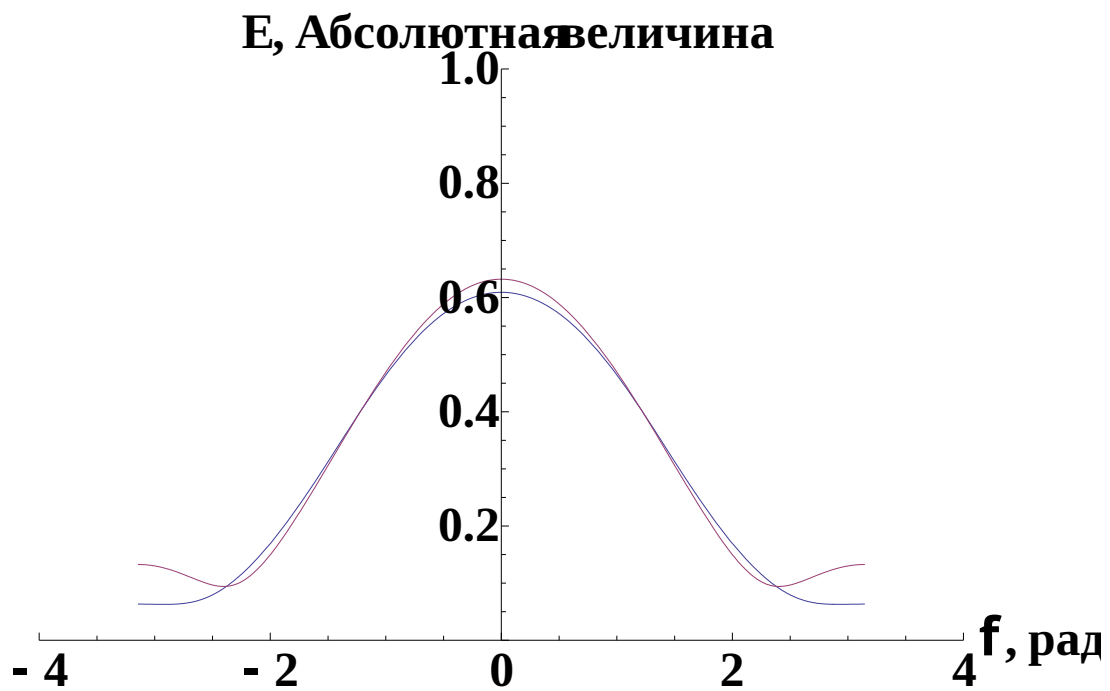
4. Графики точного решения $ka=1, \theta=\pi/2$.

$$E((r/a), \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\pi n} e^{ik((r/a)-1)\left(1 - \frac{0.5n^2}{(ka)^2(\frac{r}{a})^2}\right)} e^{i\varphi n} \quad (2.1.27)$$

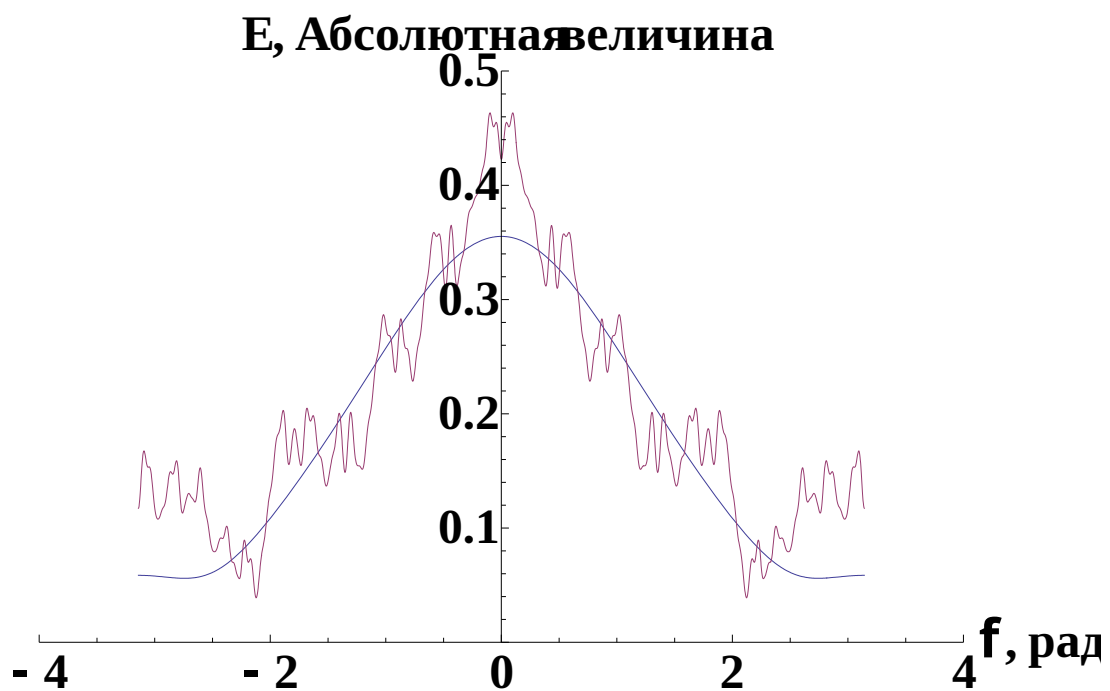
Е, Абсолютная величина



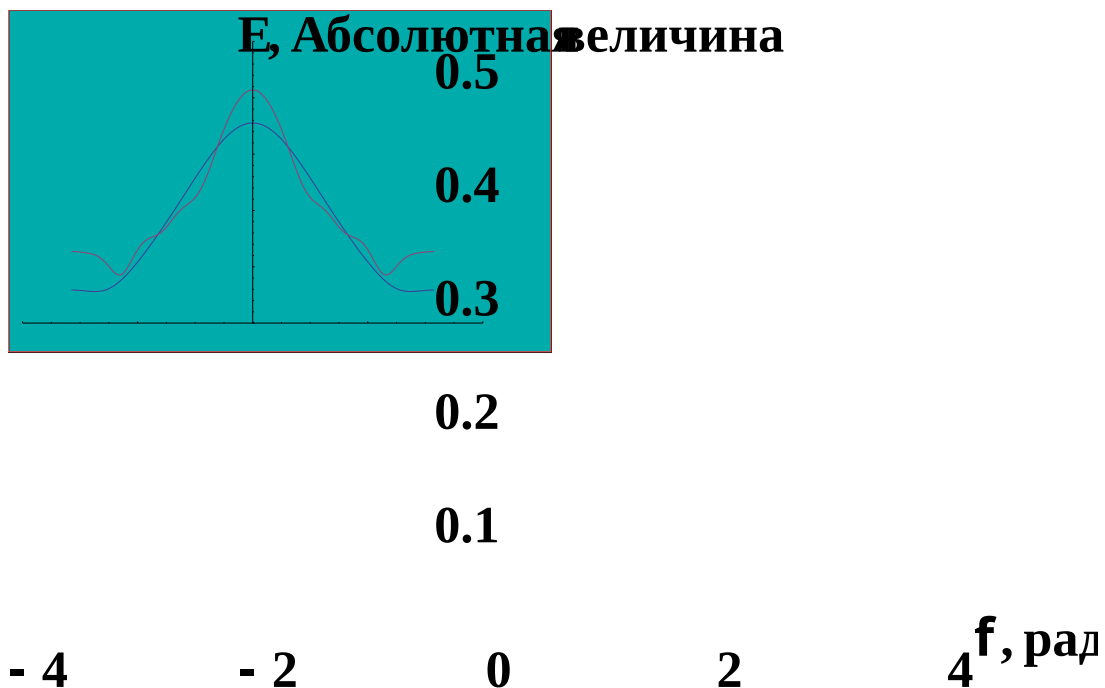
5. Точное и приближённое решения с «лишними» гармониками, $ka=1, \theta=\pi/2, r=$ па.



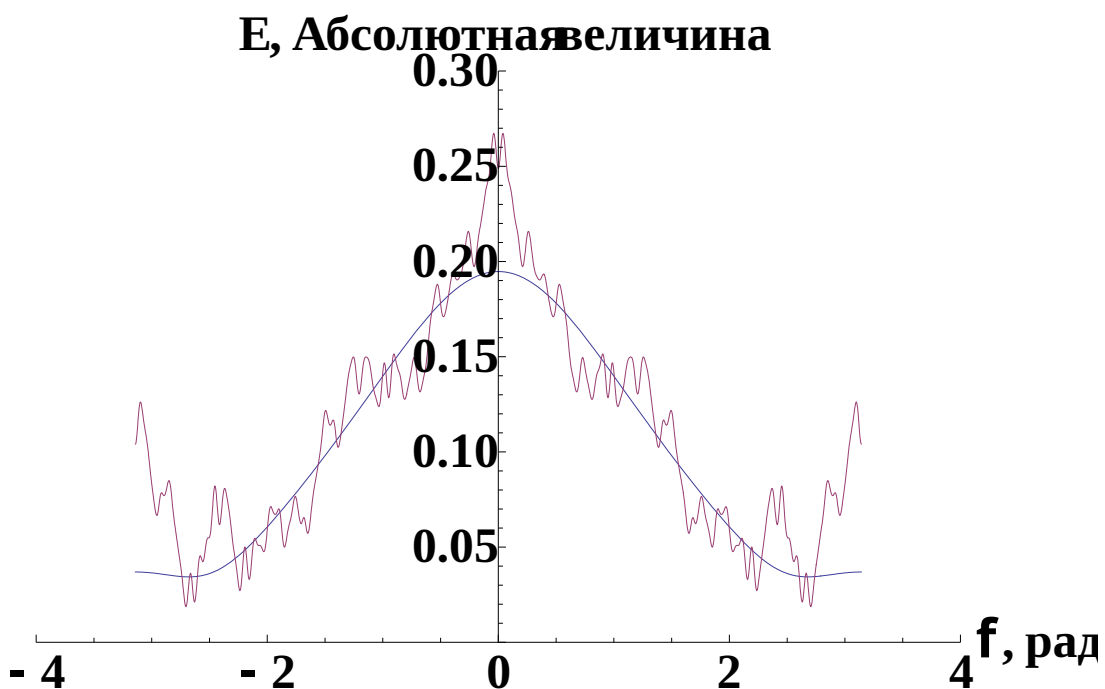
6. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=1, \theta=\pi/2, r=3\text{па}$.



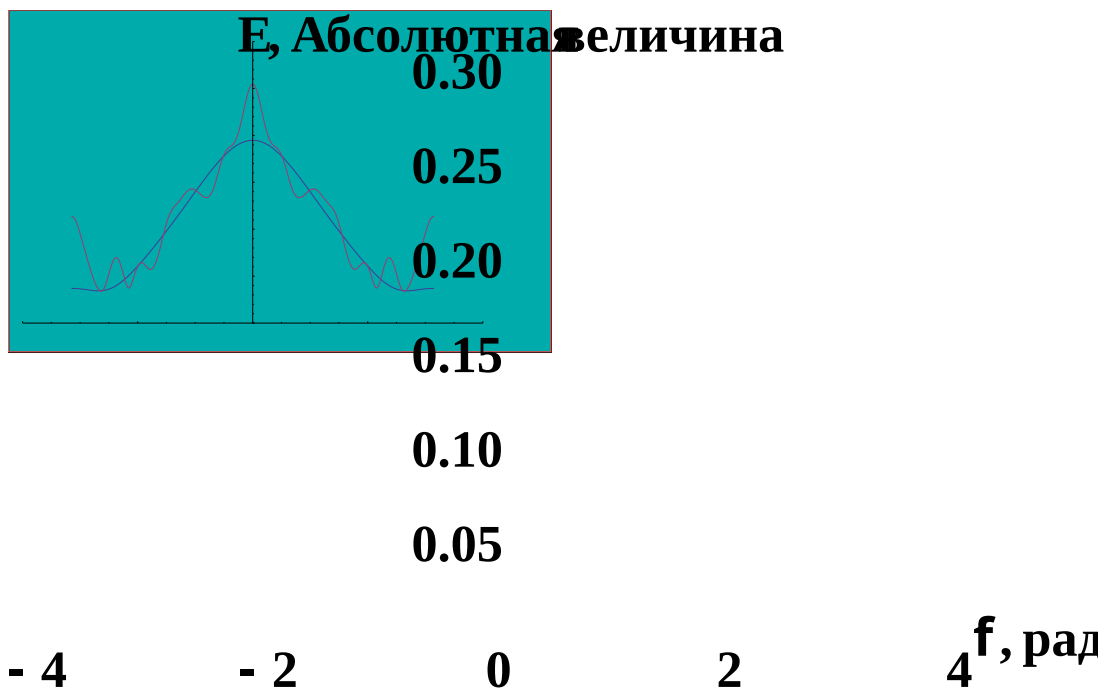
7. Точное и приближённое решения, $ka=1, \theta=\pi/2, r=3\text{па}$



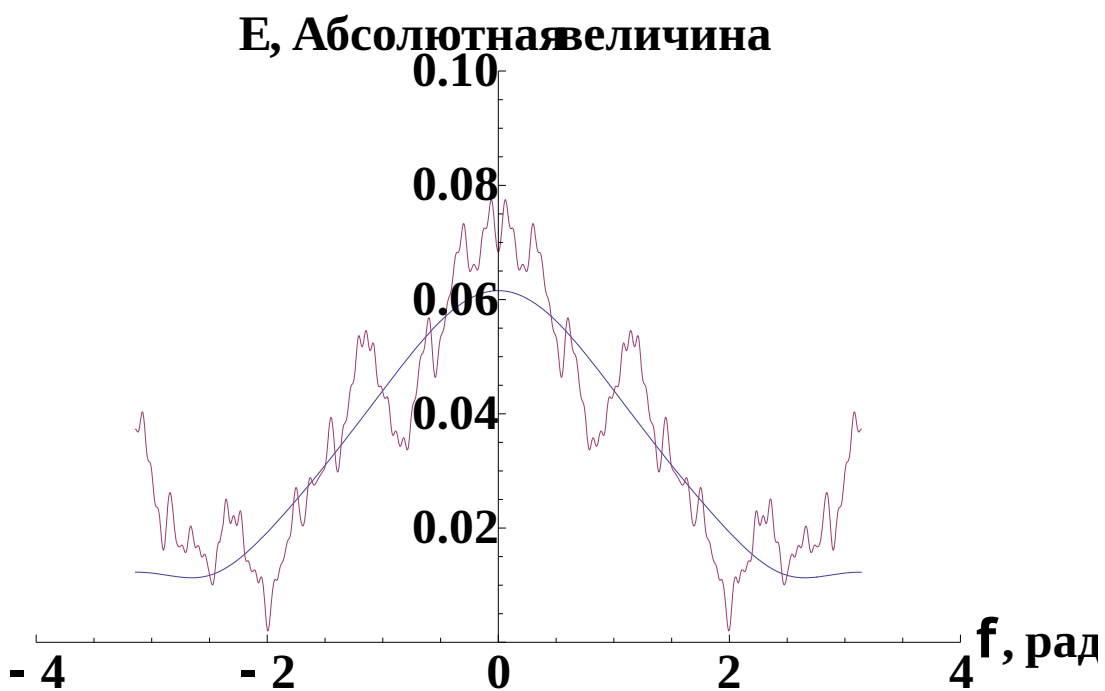
8. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=1, \theta=\pi/2, r=3\text{ па}$.



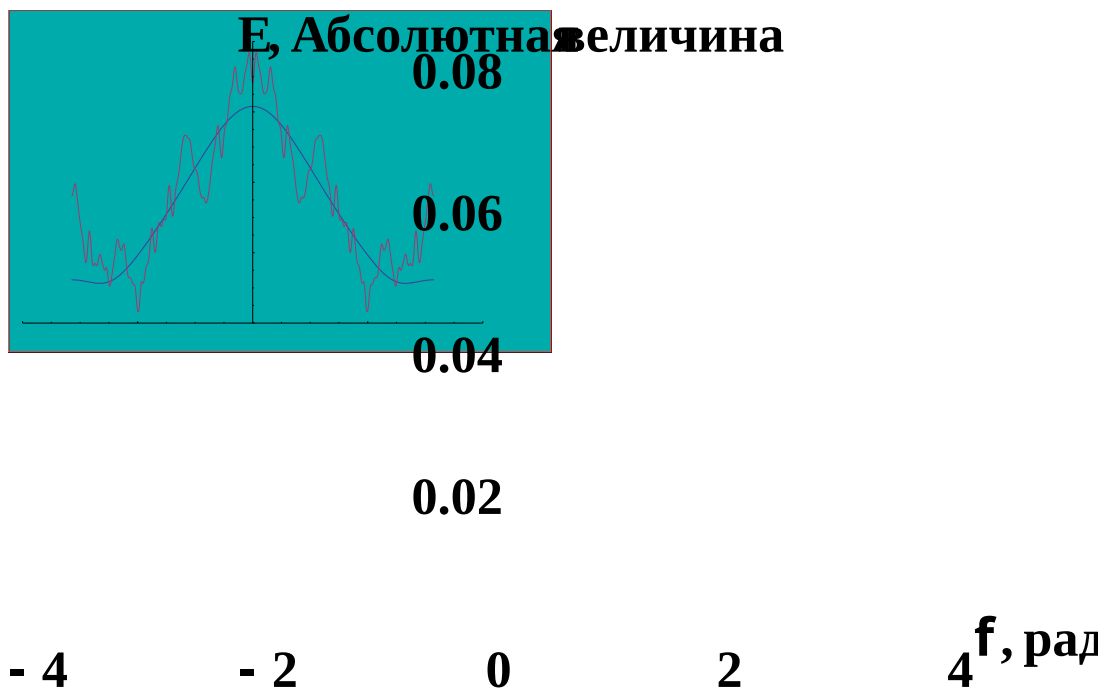
9. Зависимость от угла при $r=10\text{ па}$ (точное и приближённое, $ka=1, \theta=\pi/2$)



10. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=1, \theta=\pi/2, r=10$ па.



11. Зависимость от угла при $r=100$ па (точное и приближённое, $ka=1, \theta=\pi/2$).

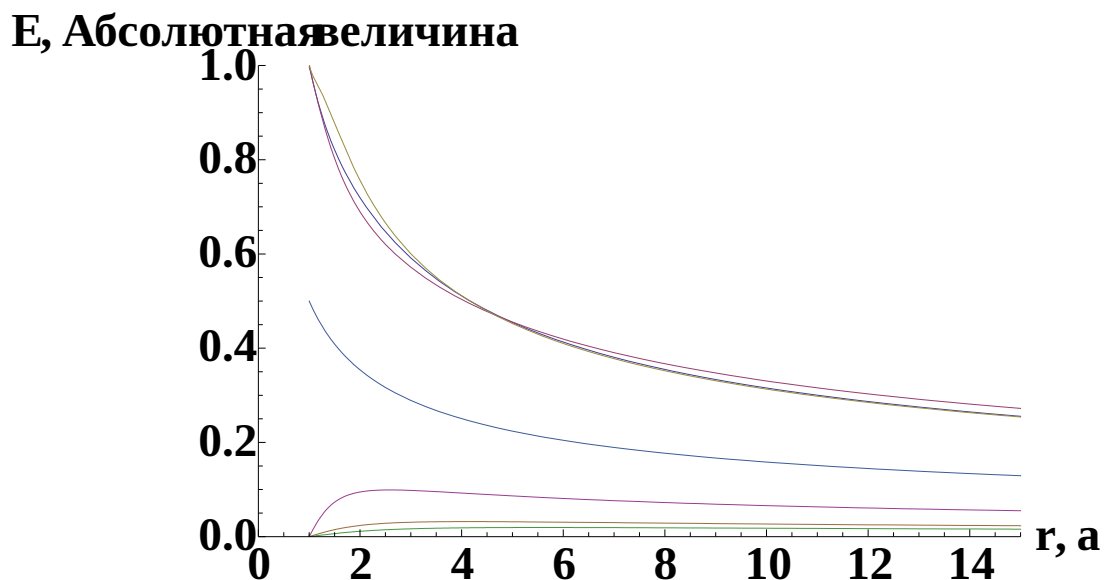


12. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=1, \theta=\pi/2, r=10a$.

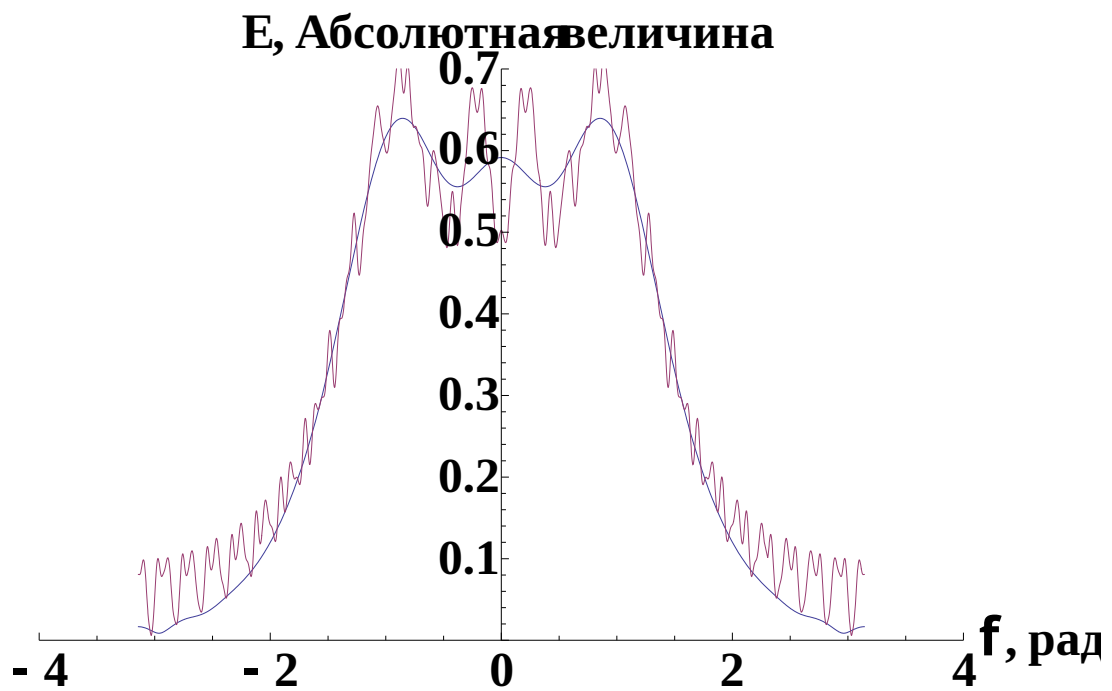
$$\Delta E + k^2 E = 0; E(r = a, \varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| < \pi/2, \\ 0, & |\varphi| > \pi/2; \end{cases} ; ka = 2\pi; E_0 = 1; r \quad (2.1.28)$$

$$E[r, \phi] = E_0 \left| \sum_{n=-100}^{100} \frac{\sin[n \cdot \frac{\pi}{2}] * \text{HankelH1}[n, ka * (\frac{r}{a})] I * n * \phi}{\pi * (n + 0.00001) * \text{HankelH1}[n, ka]} + \frac{0.5 * \text{HankelH1}[0, ka * (\frac{r}{a})]}{\text{HankelH1}[0, ka]} \right| \quad (2.1.29)$$

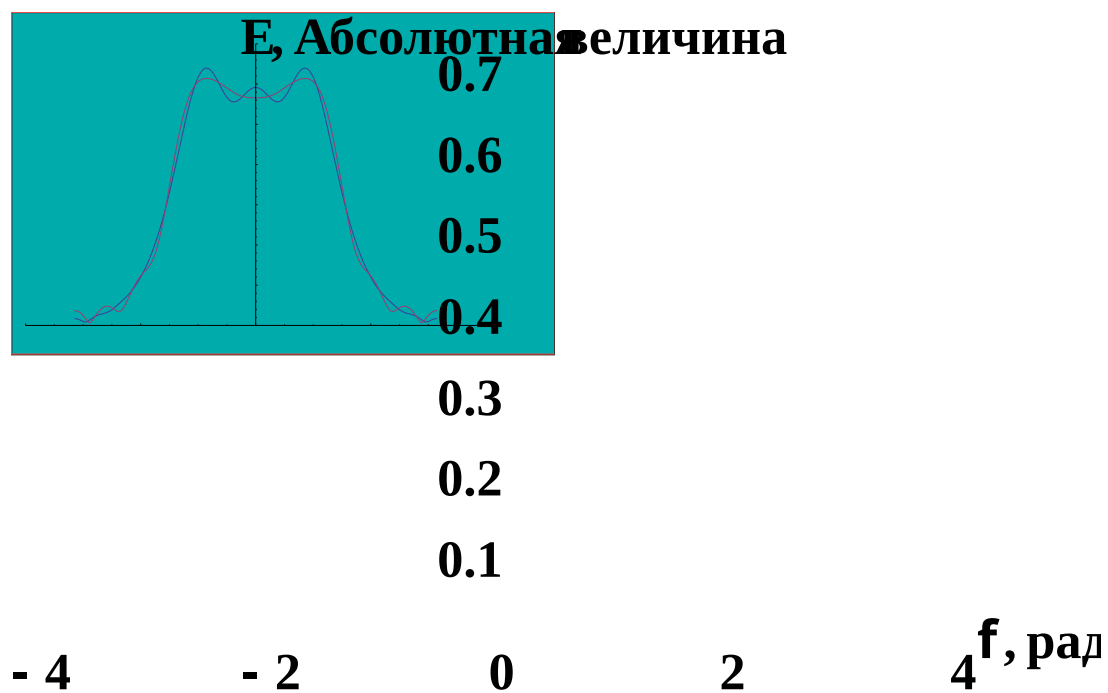
По горизонтальной оси отложен радиус в единицах a , по вертикальной – абсолютная величина E .



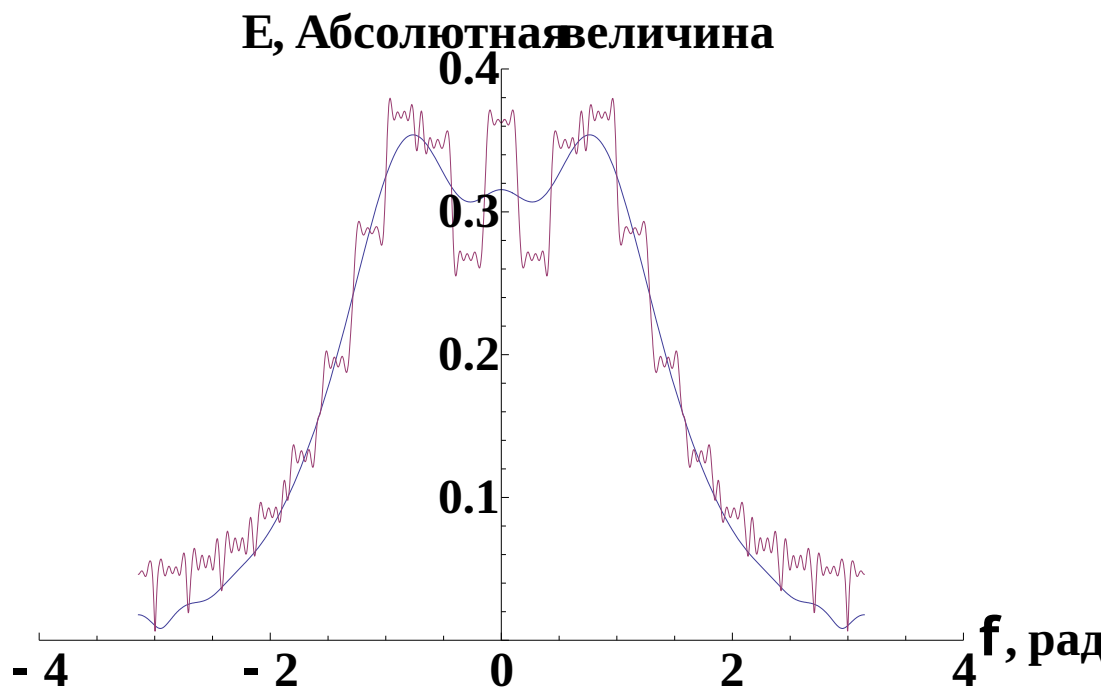
13. Для $\varphi = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6, \pm\pi$ графики точного решения.



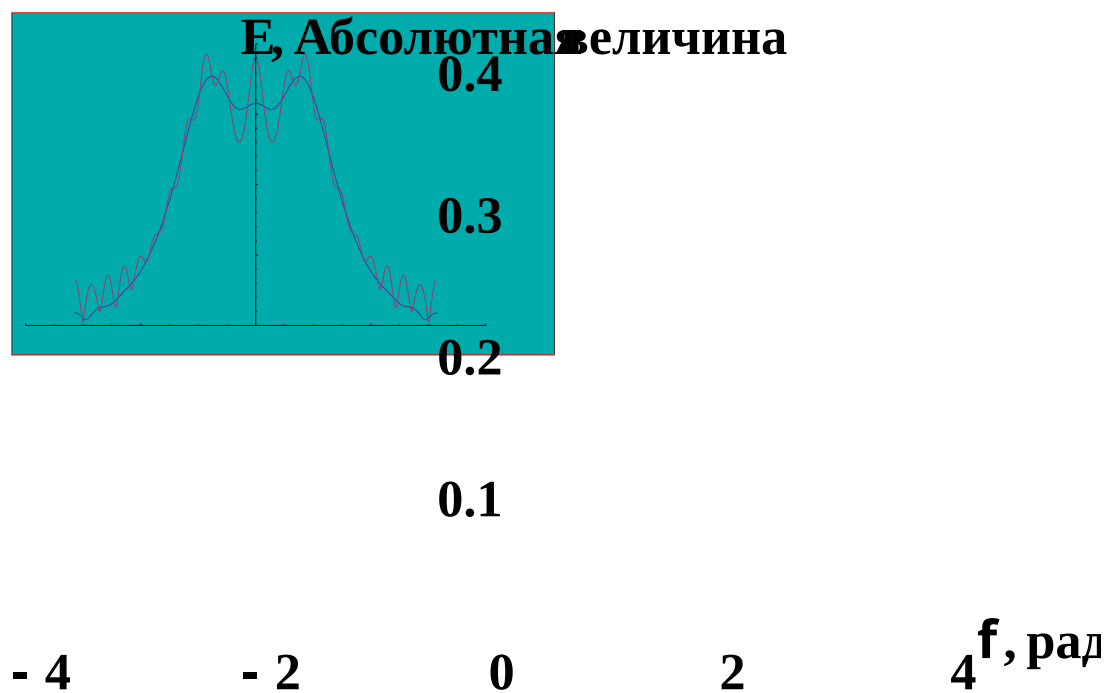
14. Зависимость от угла при $r=3a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi, \theta=\pi/2$).



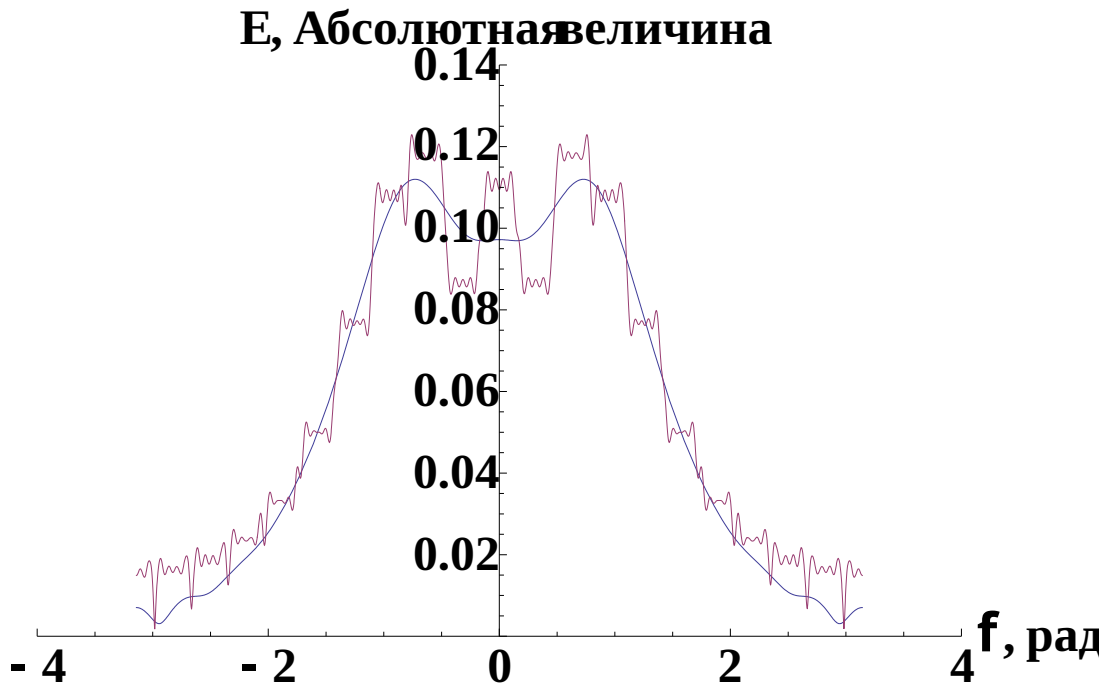
15. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=2\pi, \theta=\pi/2, r=3a$.



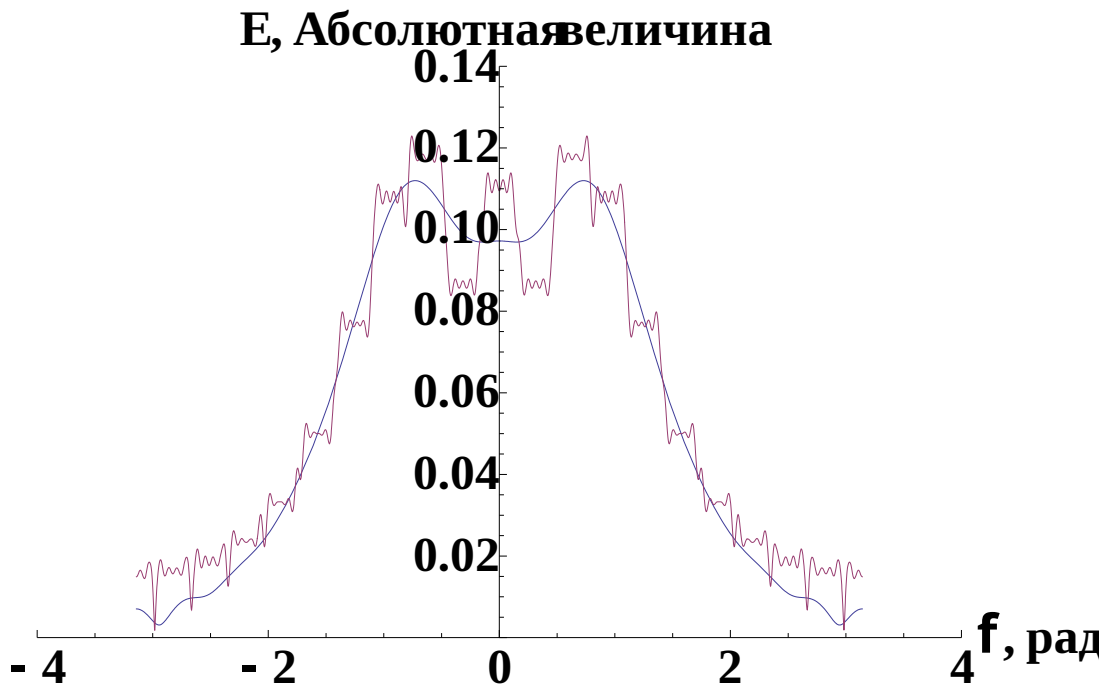
16. Зависимость от угла при $r=10a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi, \theta=\pi/2$).



17. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=2\pi, \theta=\pi/2, r=10a$.



18. Зависимость от угла при $r=100a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi, \theta=\pi/2$).



19. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=2\pi, \theta=\pi/2, r=100a$.

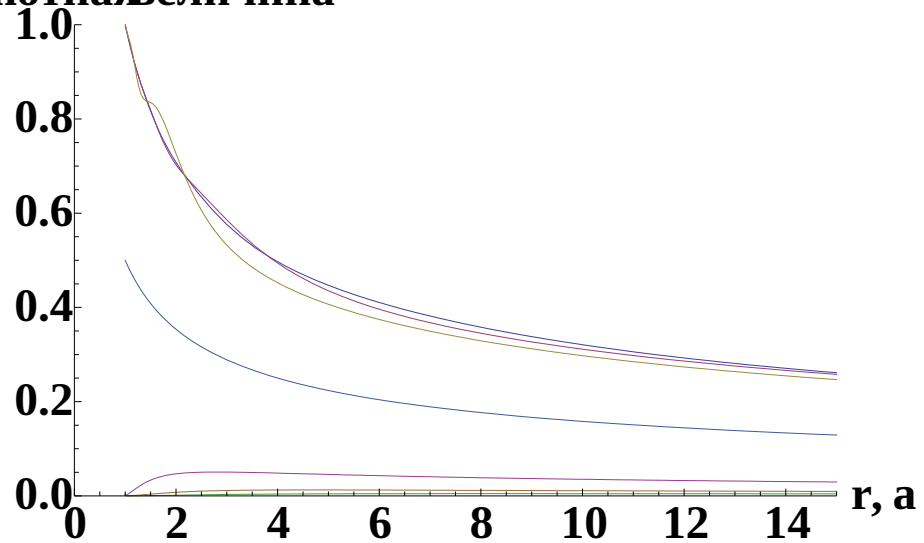
$$\square E = -k^2 E; E(r = a, \varphi) = \begin{cases} 1, & |\varphi| < \pi/2, \\ 0, & |\varphi| > \pi/2; \end{cases} \quad ka = 10\pi; E_0 = 1; r \quad (2.1.30)$$

$$E[r, \phi] = E_0 \left| \sum_{n=-100}^{100} \frac{\sin[n * \frac{\pi}{2}] * \text{HankelH1}[n, ka * (\frac{r}{a})]}{\pi * (n + 0.00001) * \text{HankelH1}[n, ka]} I^{*n * \phi} + \frac{0.5 * \text{HankelH1}[0, ka * (\frac{r}{a})]}{\text{HankelH1}[0, ka]} \right|$$

(2.1.31)

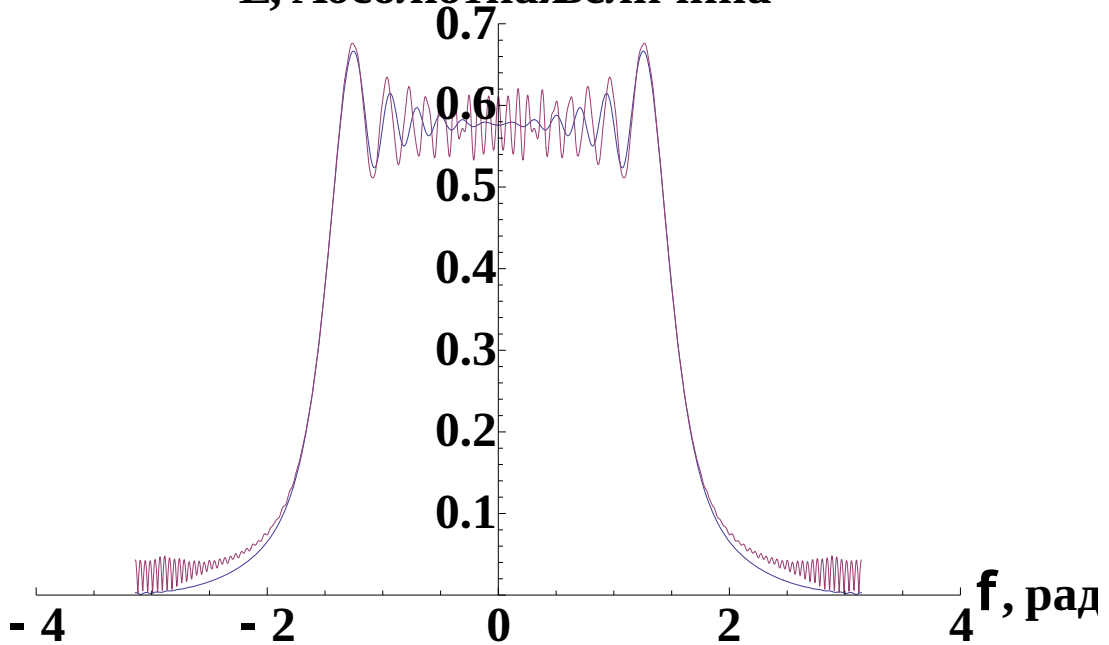
По горизонтальной оси отложен радиус в единицах a , по вертикальной – абсолютная величина E .

E , Абсолютная величина

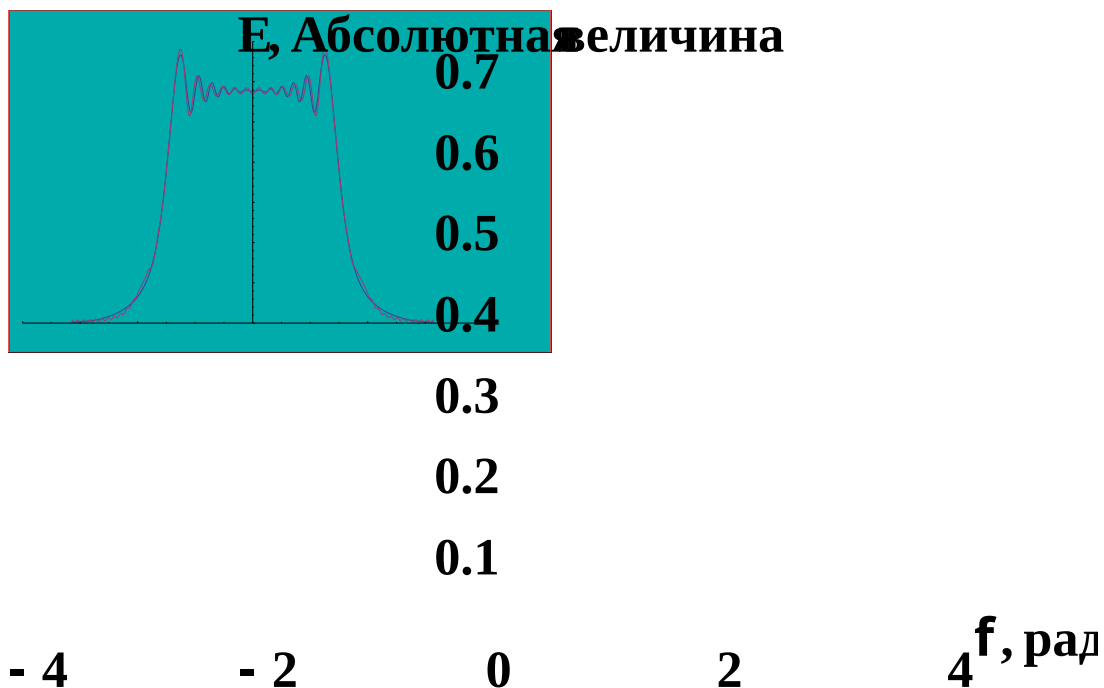


20. Для $\phi = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6, \pm\pi$ графики точного решения.

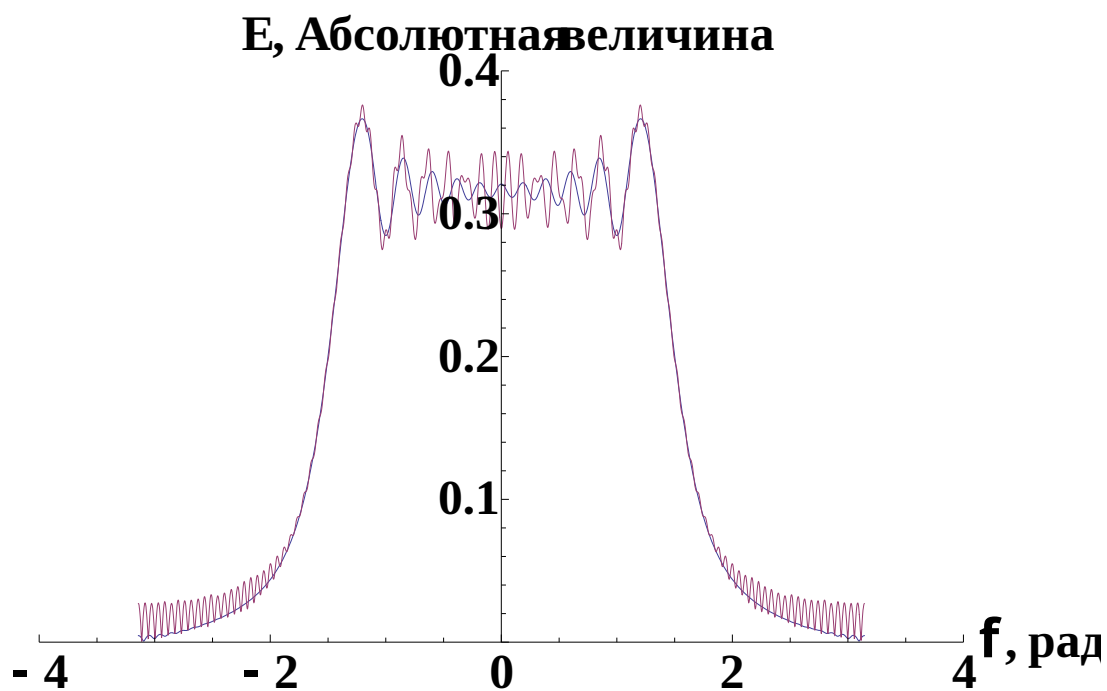
E , Абсолютная величина



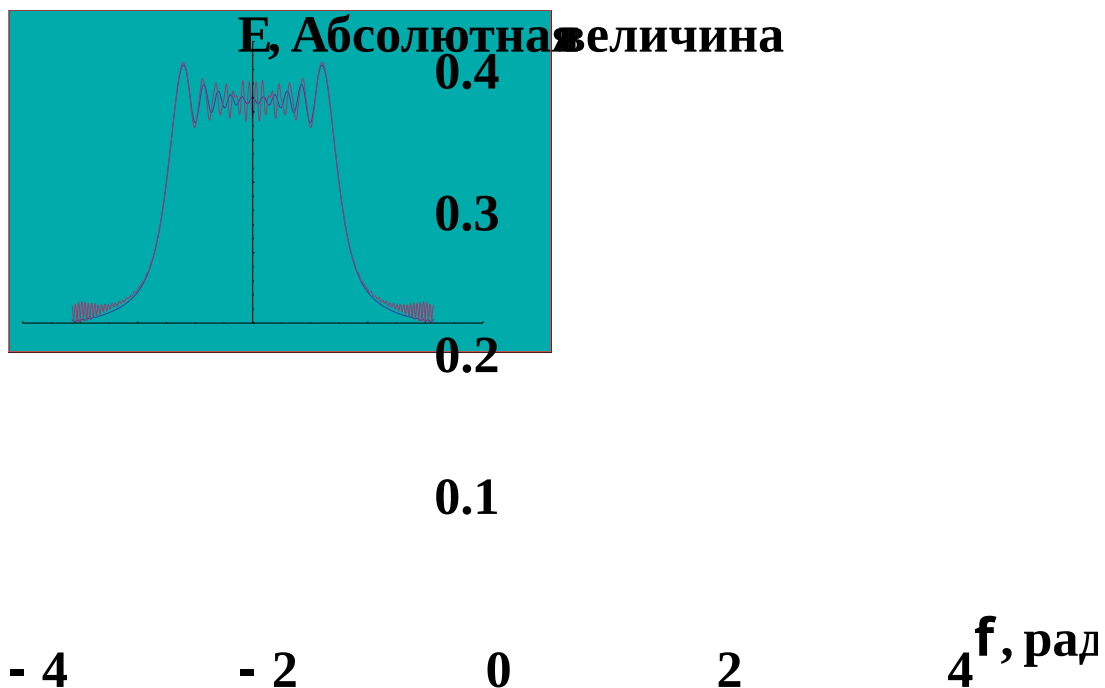
21. Зависимость от угла при $r=3a$ (точное и приближённое, $ka=10\pi, \theta=\pi/2$).



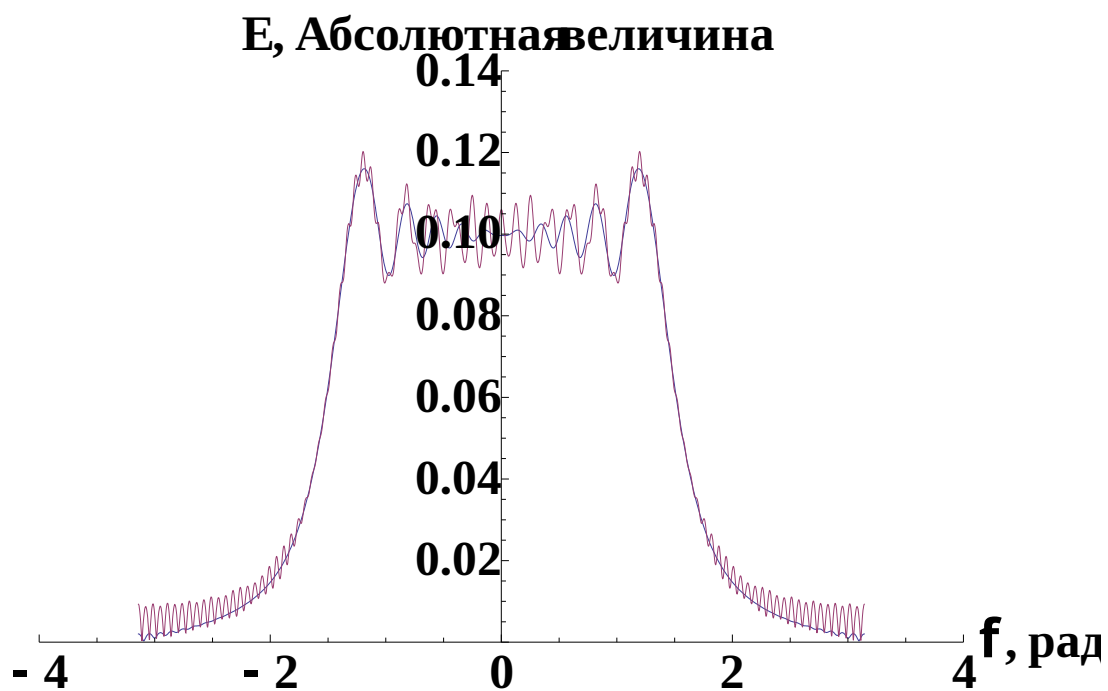
22. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=10\pi, \theta=\pi/2, r=3a$



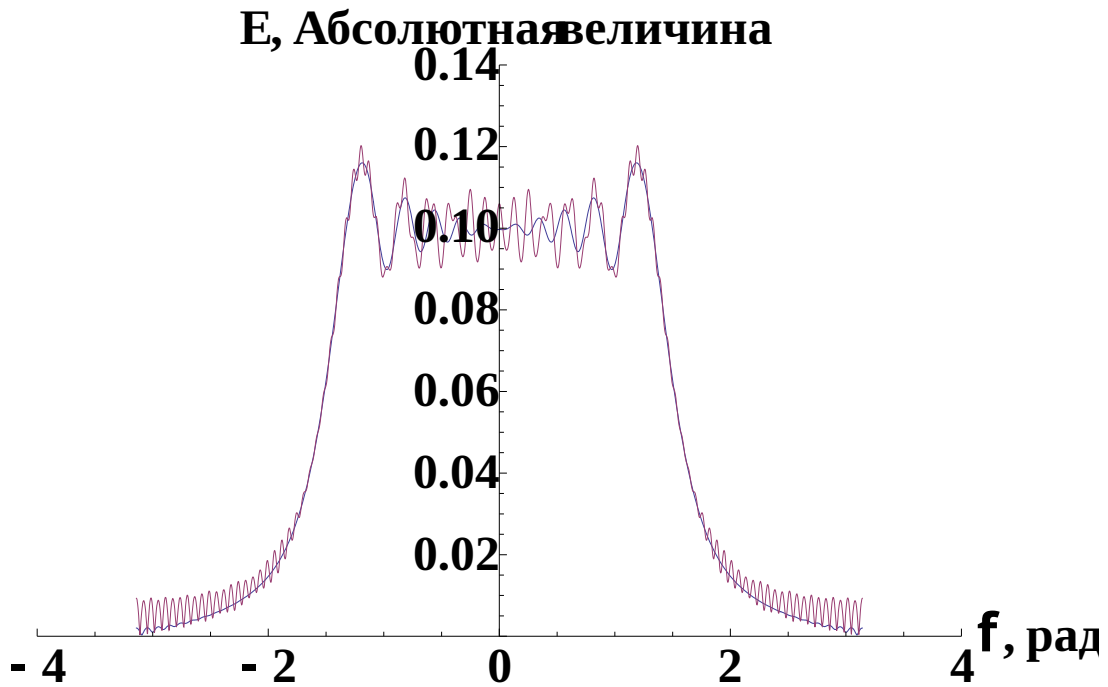
23. Зависимость от угла при $r=10a$ (точное и приближённое, $ka=10\pi, \theta=\pi/2$).



24. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=10\pi, \theta=\pi/2, r=10$



25. Зависимость от угла при $r=100a$ (точное и приближённое, $ka=10\pi, \theta=\pi/2$).



26. Точное и приближённое решения без «лишних» гармоник, $ka=10\pi, \theta=\pi/2, r=10$

2.2. Излучение с контура в виде окружности.

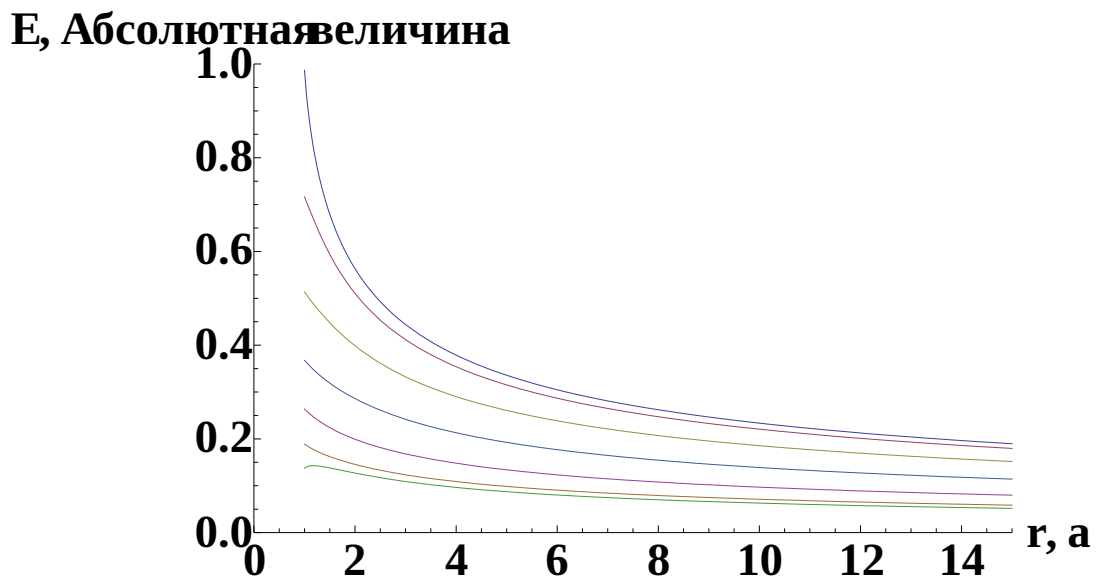
$$\square E + k^2 E = 0; E(r = a, \varphi) = E_0(\varphi) = e^{-\frac{2|\varphi|}{\pi}}; -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2.2.1)$$

Аналогично предыдущему случаю:

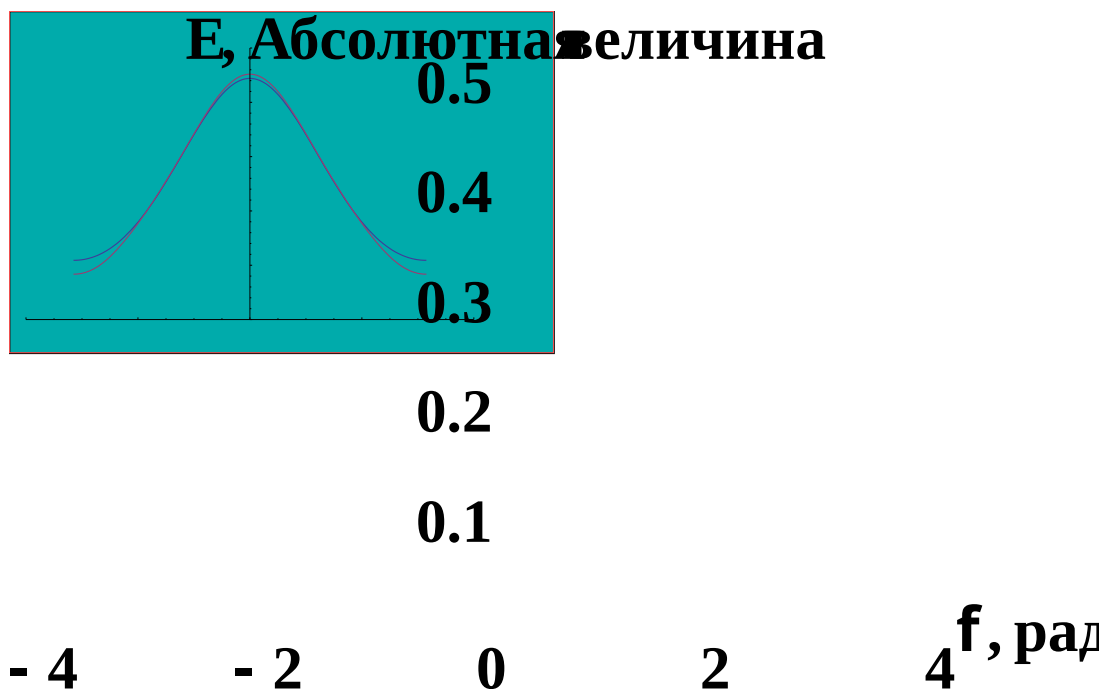
$$\begin{cases} E(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r/a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{ik(r-a)\left(1-\frac{0.5n^2}{k^2 a r}\right)} e^{in\varphi}, \\ E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}; \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\left(in\varphi + \frac{2|\varphi|}{\pi}\right)} d\varphi = \left(\frac{1 - (2 + I * \pi * n)}{(2 + I * \pi * n)} + \frac{1 - (2 - I * \pi * n)}{(2 - I * \pi * n)} \right) \frac{1}{2} \quad (2.2.3)$$

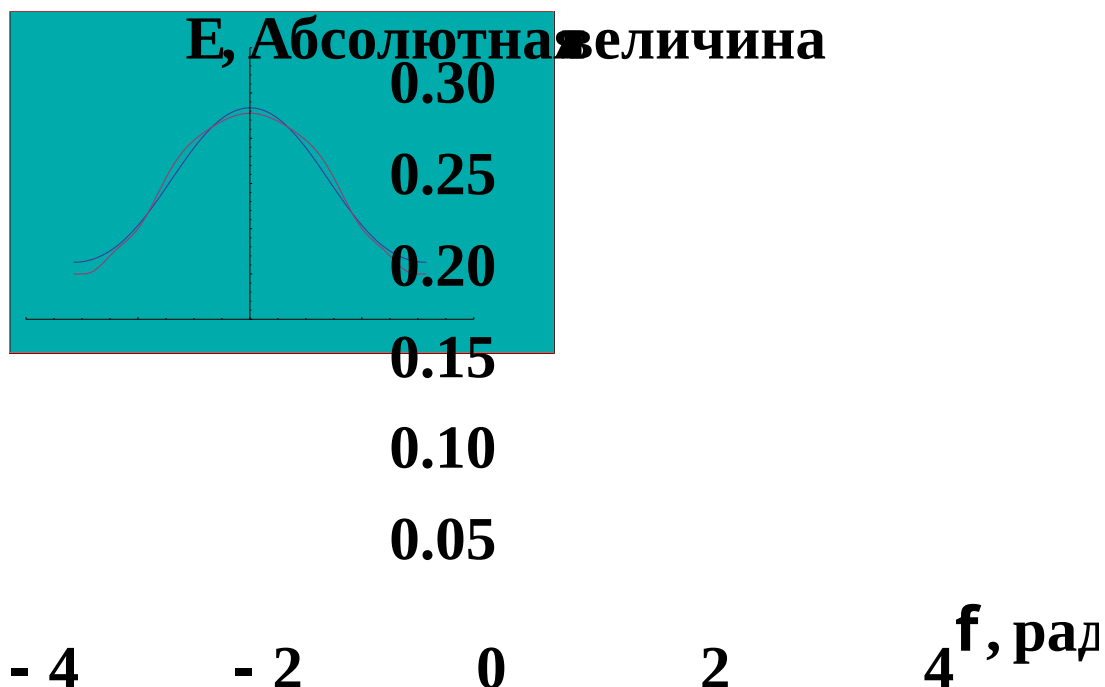
По горизонтальной оси отложен радиус в единицах a , по вертикальной – абсолютная величина E .



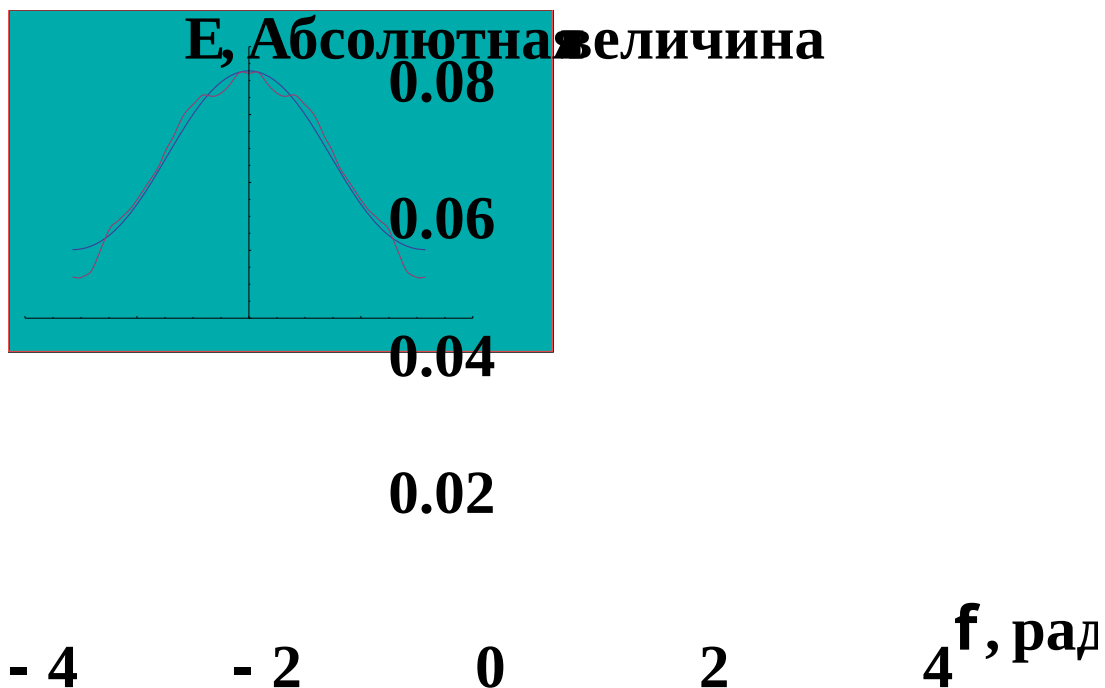
27. Для $\phi = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6, \pm\pi$ графики точного решения ($ka=1$).



28. Зависимость от угла при $r=3a$ (точное и приближённое, $ka=1$).

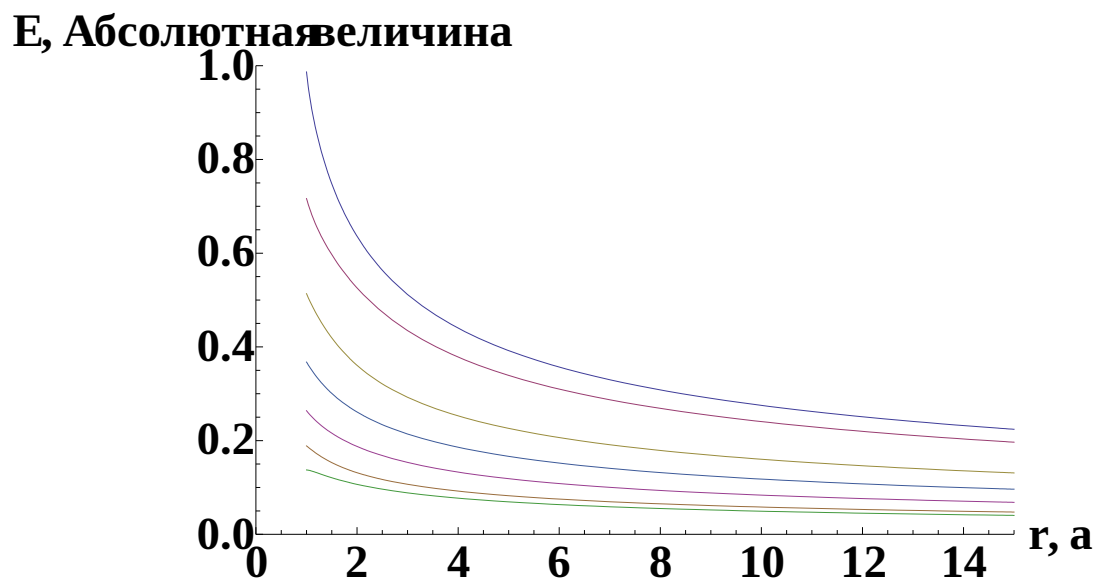


29. Зависимость от угла при $r=10a$ (точное и приближённое, $ka=1$).



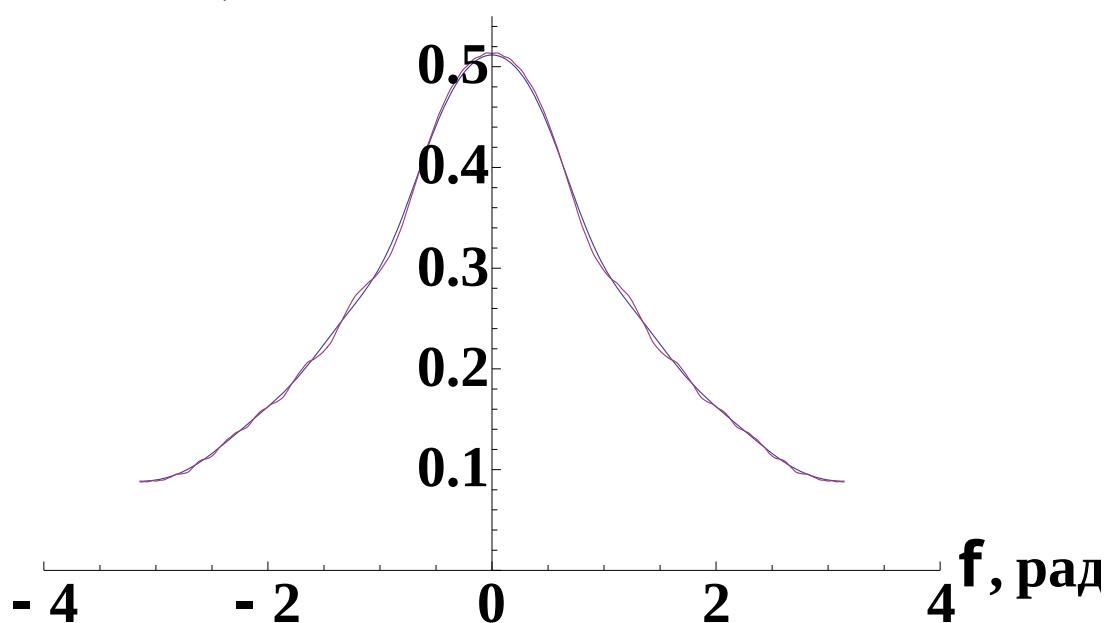
30. Зависимость от угла при $r=100a$ (точное и приближённое, $ka=1$).

По горизонтальной оси отложен радиус в единицах a , по вертикальной – абсолютная величина E .



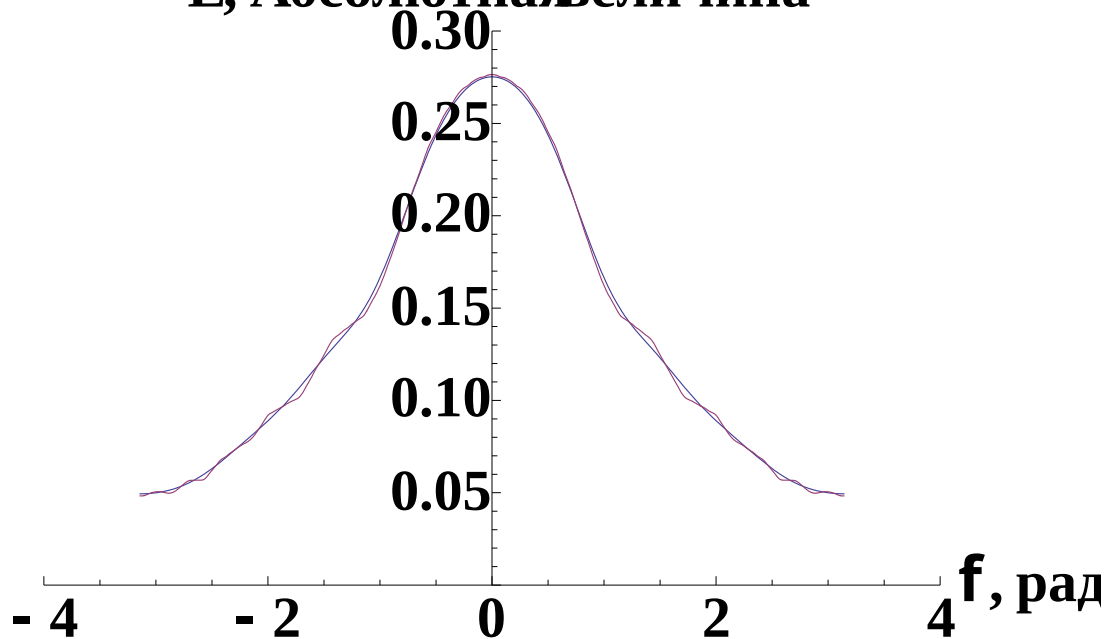
31. Для $\phi = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6, \pm\pi$ графики точного решения ($ka=2\pi$).

Е, Абсолютная величина



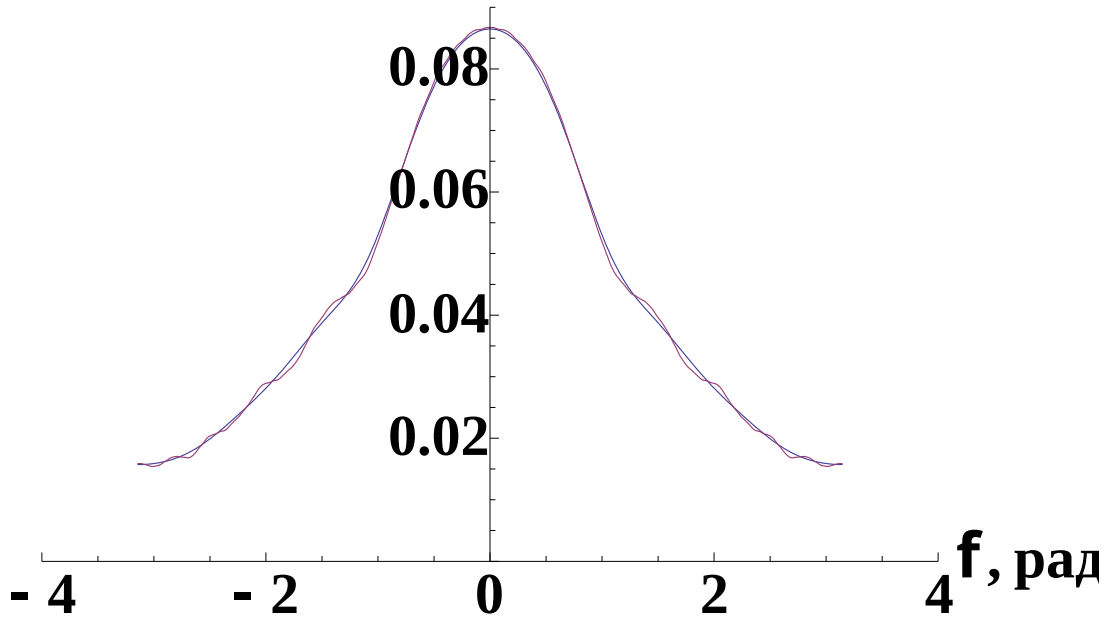
32. Зависимость от угла при $\gamma=3a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi$).

Е, Абсолютная величина



33. Зависимость от угла при $\gamma=10a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi$).

Е, Абсолютная величина



34. Зависимость от угла при $\gamma=100a$ (точное и приближённое, $ka=2\pi$).

Метод Малюжинца даёт лучшее совпадение с точным решением для электрически крупных поверхностей и в дальней зоне. Чтобы улучшить сходимость метода Малюжинца, можно применить сглаживание функции краевого условия на сетке, обеспечив тем самым машинную непрерывность производных и значений функции.

2.3. Излучение с контура в виде параболы.

Введём параметризацию в декартовой плоскости:

$$x(T) = T^2; y(T) = T \quad (2.3.1)$$

Радиус кривизны будет равен:

$$\rho(T) = \frac{(1+4T^2)^{3/2}}{2} \quad (2.3.2)$$

Вводим координаты Малюжинца.

$$s(T) = \int_0^T \sqrt{1+4T^2} dT = \frac{T\sqrt{1+4T^2}}{2} + \frac{1}{4} \ln |2T + \sqrt{1+4T^2}| \quad (2.3.3)$$

$$\gamma(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\rho(s')}; g = (2\rho(T))^{2/3} = 4T^2 + 1 \quad (2.3.4)$$

$$s = \frac{(g[g-1])^{1/2}}{2} + \frac{1}{4} \ln |\sqrt{g} + \sqrt{g-1}|; \rho = \frac{g^{3/2}}{2} \quad (2.3.5)$$

$$\gamma(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\rho(s')} = [s = s(T), T = T(s), ds = \sqrt{1+4T^2} dT] = \int_0^{T(s)} \frac{2dT}{1+4T^2} \quad (2.3.6)$$

$$\gamma(s) = \arctg [2T(s)] \quad (2.3.7)$$

$$P_1(s) = \int_0^s \frac{\gamma(s')}{\rho(s')} ds' = \int_0^{T(s)} \frac{2\arctg[2T(s')]}{1+4T(s')^2} dT = \frac{1}{2} \arctg^2 [2T(s)] \quad (2.3.8)$$

$$P_2(s) = \int_0^s \gamma(s') ds' = \int_0^{2T(s)} \arctg x \sqrt{1+x^2} dx = J(2T(s)) \quad (2.3.9)$$

$$J(x) = \int_0^x \arctg x \sqrt{1+x^2} dx \quad (2.3.10)$$

$$J(x) = \frac{x(\sqrt{1+x^2})}{2} + \frac{\arctg x}{2} \ln [x + \sqrt{1+x^2}] - \int_0^x \frac{x dx}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} J_1(x) \quad (2.3.11)$$

$$J_1(x) = \int_0^x \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}; \int_0^x \frac{x dx}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \quad (2.3.12)$$

Последовательно делаем замены переменных в интеграле J_1 : $x = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = 2 \operatorname{arctg} z$, $q = (1+z)/(1-z)$, потом берём по частям и сводим к спецфункциям.

Проделав вычисления, можно получить:

$$J_1(x) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + (x\sqrt{1+x^2}) \operatorname{arctg} x) - \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \operatorname{arctg} x \\ i\chi_2(i) - i\chi_2(i [x + \sqrt{1+x^2}]) \quad (2.3.13)$$

$\chi_n(x)$ - Хи-функция Лежандра.

$i\chi_2(i) \approx 0.915965594$ - постоянная Каталана.

Таким образом, получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = 0, & -\frac{\gamma(L)}{kL} < t < \frac{\gamma(L)}{kL}, \quad -\gamma(L) < \psi < \gamma(L); \\ W(0, \psi) = u_0 \left[\frac{L\psi}{\gamma(L)} \right] e^{ik \left[\int_0^{\frac{L\psi}{\gamma(L)}} \gamma(s) ds - \frac{L}{2\gamma(L)} \psi^2 \right]}; \end{cases} \quad (2.3.14)$$

Конечный результат:

$$\begin{cases} u(\xi, s) = \frac{W(t, \psi)}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{L} \gamma(L)}} e^{ikP(\xi, s)}, \\ P(\xi, s) = \frac{[s + \xi \gamma(s)]^2}{2[\xi + \frac{L}{\gamma(L)}]} - P_2(s) - \xi P_1(s); \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Формулы перехода к новым координатам:

$$t = \frac{\gamma(L)\xi}{kL[\xi + \frac{L}{\gamma(L)}]}; \quad \psi = \gamma(L) \frac{s + \xi \gamma(s)}{L + \xi \gamma(L)} \quad (2.3.16)$$

Рассмотрим теперь частный случай с помощью метода Кранка-Николсона. $\square E + k^2 E = 0$; $E(0, s) = E_0(s) = e^{-\alpha \bullet s^2}$ (2.3.17)

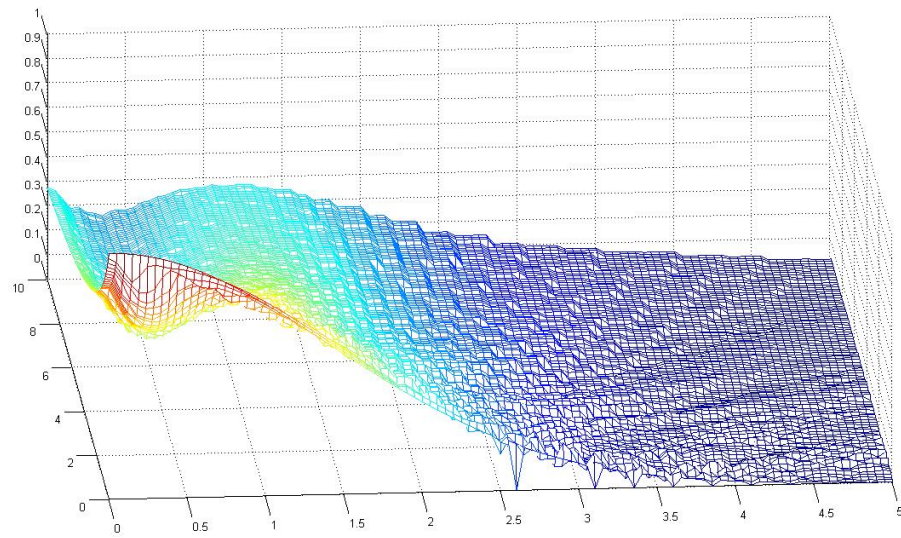
При переходе от одной полубесконечной ветки к другой касательный вектор поворачивается на 2π , следовательно $\gamma(L) = \pi$ при $L \rightarrow \infty$, $-L < s < L$.

$$\gamma(s) = \int_0^s \frac{ds}{\rho(s)} = \operatorname{arctg}(2T[s]) \quad (2.3.18)$$

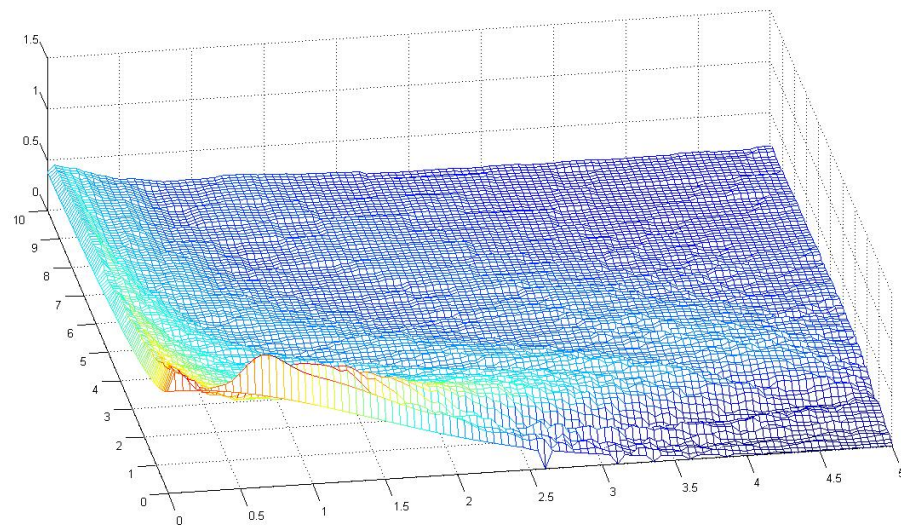
$$\gamma(L) = \pi; \quad t = \frac{\xi \pi}{kL[\xi + \frac{L}{\pi}]}; \quad \psi = \pi \frac{s + \xi \operatorname{arctg}(2T[s])}{L + \xi \pi} \quad (2.3.19)$$

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = 0, & 0 < t < \frac{\pi}{kL}, \quad -\pi < \psi < \pi; \\ W(0, \psi) = u_0 \left[\frac{L\psi}{\pi} \right] e^{ik \left[\int_0^{\frac{L\psi}{\pi}} \gamma(s) ds - \frac{L}{2\pi} \psi^2 \right]}; \end{cases} \quad (2.3.20)$$

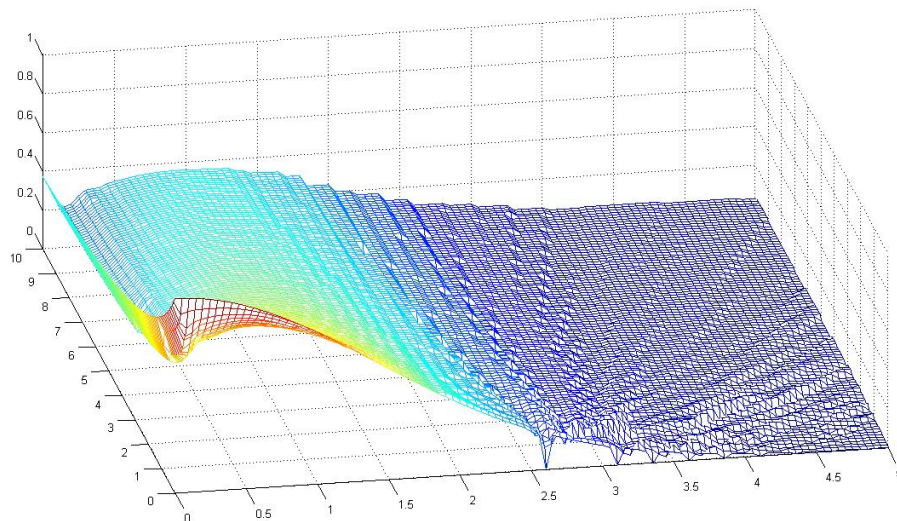
По высоте откладываем амплитуду поля, по оси абсцисс - s , по оси ординат - ξ .



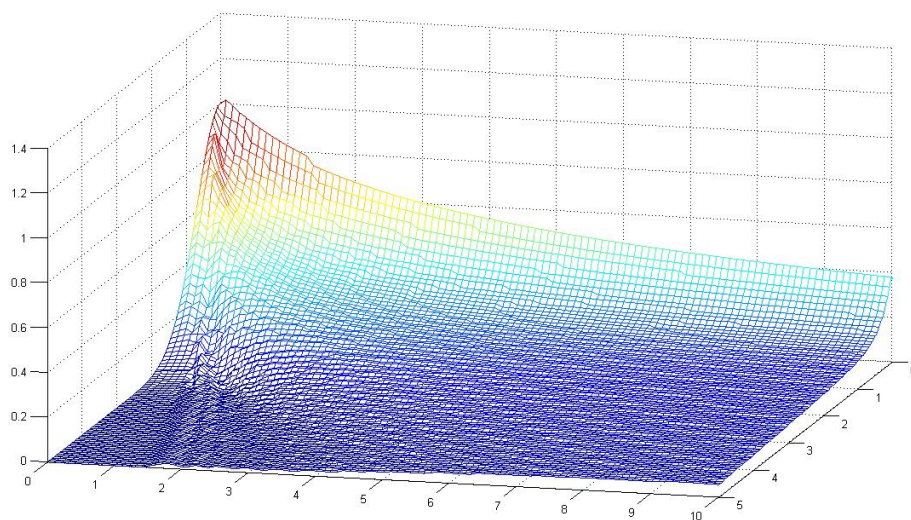
35. $\alpha=0.25, k=2\pi, y=a*x^2, a=1.$



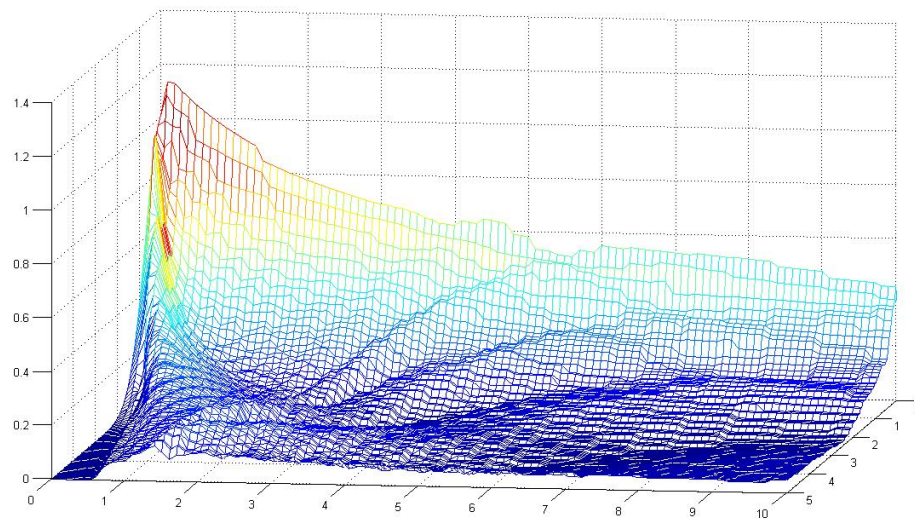
36. $\alpha=0.25, k=1, y=a*x^2, a=1.$



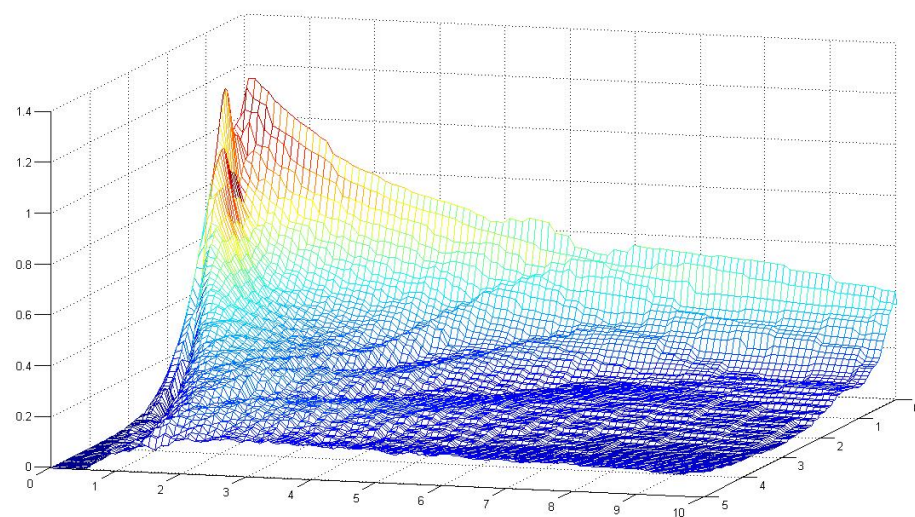
37. $\alpha=0.25$, $k=10\pi$, $y=a*x^2$, $a=1$.



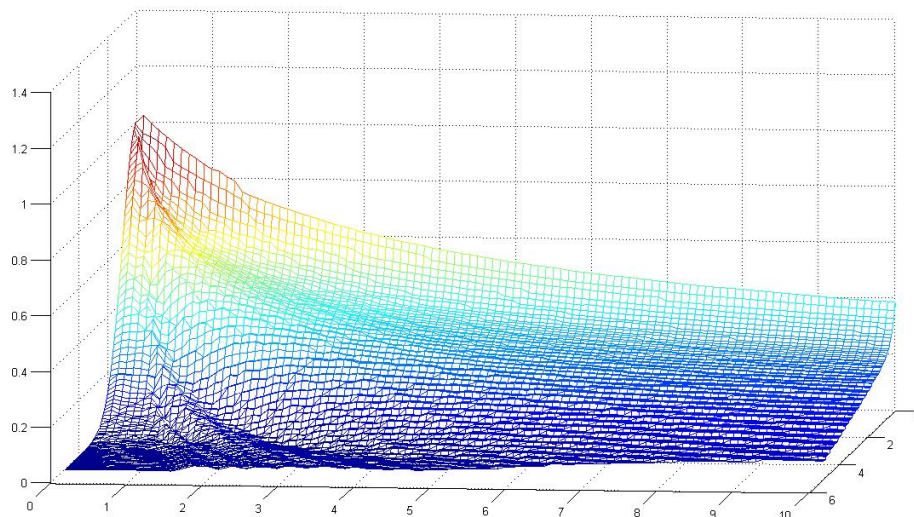
38. $\alpha=1$, $k=\pi$, $y=a*x^2$, $a=1$.



39. $\alpha=1, k=1, y=a*x^2, a=1.$



40. $\alpha=0.5, k=1, y=a*x^2, a=1.$



41. $\alpha=0.5$, $k= \pi$, $y=a \cdot x^2$, $a=1$.

Глава 3.

Заключение.

Проведённое исследование продемонстрировало возможность успешного использования параболического уравнения Малюжинца для задачи дифракции. Сравнительный анализ решений точного и параболического уравнений показал, что данное приближение хорошо описывает поле как в ближней, так и в дальней зоне, что даёт возможность успешно использовать его для расчётов излучения.

Список использованной литературы.

1. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения радиоволн. – М.: Сов. радио, 1970. – 520 с.
2. Diffraction and propagation models based on the parabolic wave equation. A.V. Popov.
3. Computation of paraxial wave fields using transparent boundary conditions. A.V. Popov. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, Vol.46, No.9, pp.1595-1600.
4. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. . – М.: Наука, 1966, в трёх томах.
5. Градштейн, Рыжик. Интегралы.
6. G.D.Malyuzhinets. Progress in understanding diffraction phenomena, Sov. Phys. Usp. Engl. Transl., 69(2), 321-334, 1959.

7. M.A.Leontovich, V.A.Fock. Solution of the problem of EM wave propagation along the earth surface by the parabolic equation method, J.Phys., Moscow, 10(1), 13, 1946.